Sebastian Popescu

Oscilații mecanice, unde elastice și acustică

III-12-861

MATRIX ROM
BUCUREȘTI

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BIBL. CENTR. UNIV.
„M. EMINESCU" IAŞI
FIZICA
III-12.861.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Donație autor

Sebastian POPESCU

Oscilații mecanice, Unde elastice
și
Acustică

I 5966

134754
B.C.U. - IASI

MATRIX ROM
Bucureşti 2003

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

© MATRIX ROM
C.P. 16 - 162
77500 - BUCUREŞTI
tel. 01.4113617, fax 01.4114280
e-mail: matrix@fx.ro
www.matrixrom.ro

Editura MATRIX ROM este acreditată de
CONSILIUL NAŢIONAL AL CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE DIN ÎNVĂŢĂMÂNTUL SUPERIOR

Referenţi ştiinţifici: **prof.univ.dr.doc. Mircea SANDULOVICIU**
Facultatea de Fizică, Univ. „Al. I. Cuza" Iaşi
conf.univ.dr. Dumitru LUCA
Facultatea de Fizică, Univ. „Al. I. Cuza" Iaşi

ISBN 973 - 685 - 600 - 3

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Profesorului meu, Panaite FORȚU,

de la care am deprins

din arta rezolvării problemelor.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Prefață

Prezenta culegere de probleme a fost scrisă cu scopul declarat de a oferi studenților fizicieni un instrument util de lucru în cadrul orelor de seminar la disciplinele "Oscilații și Unde" - pentru studenții secțiilor Biofizică și Fizică Medicală, respectiv "Mecanică Fizică și Acustică", partea a doua - pentru studenții secțiilor Fizică, Fizică Tehnologică și Fizică Informatică, secții existente la Facultatea de Fizică a Universității "Alexandru Ioan Cuza" din Iași. Culegerea de față este utilă însă și studenților facultăților de Chimie, cu profil tehnic, cadrelor didactice care îndrumă activitatea de seminar și laborator la disciplinele care conțin capitole de oscilații, unde și acustică, profesorilor de liceu, precum și elevilor, atât în cadrul activităților de la clasă, cercuri de fizică, cât și pentru pregătirea în vederea participării la diferite concursuri școlare.

Ideea de la care s-a plecat în elaborarea acestei culegeri este aceea de a oferi cititorilor ei un mod de gândire în abordarea unei probleme de fizică în vederea rezolvării ei. Acesta este motivul pentru care aproape toate problemele au rezolvări complete. Problemele asemănătoare celor cu rezolvări complete au indicații de rezolvare și rezultatul final, neexistând probleme la care să nu se ofere măcar rezultatul final. În acest fel culegerea se adresează tuturor categoriilor de rezolvitori, indiferent de nivelul de măiestrie al acestora. Chiar și problemele simple au soluții complete pentru a nu-i descuraja pe rezolvitorii neantrenați. Problemele mai complicate au fost toate rezolvate integral pentru a pune la dispoziția cititorului modalitățile de descoperire a subtilităților fenomenelor și proceselor fizice implicate.

Ideile cheie în rezolvarea problemelor de fizică care s-au avut în vedere și în elaborarea prezentei culegeri sunt următoarele:

- nu există problemă nerezolvabilă! Acesta este motivul rezolvărilor oferite în partea a doua a lucrării. Recomandăm cu acest prilej însușirea în prealabil de către cititori a noțiunilor teoretice de bază, fără de care prezenta culegere este inutilă!

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

- rezolvarea se află în enunț! Din acest motiv recomandăm utilizatorilor lectura atentă și repetată a enunțului până când aceștia văd cu ochii minții "filmul" proceselor fizice implicate de enunț.

Multe din problemele conținute în acest volum au fost selectate și prelucrate dintr-un număr de peste 2000 de probleme din diferite surse, toate prezente la bibliografie. Unele probleme apar pentru prima dată acum în limba română, iar altele nu au mai fost publicate niciodată, fiind originale. În mare parte aceste probleme sunt cele discutate în ultimii ani de către autor cu studenții Facultății de Fizică în cadrul orelor de seminar la disciplinele amintite mai sus.

Cu ajutorul celor 301 probleme am încercat să oferim cititorului o varietate cât mai largă de situații fizice, tocmai pentru a sublinia forța principiilor și legilor de bază ale mecanicii clasice. În acest context menționăm, de exemplu, numărul mare de probleme propuse la tema "Oscilații cu mai multe grade de libertate". Aceste probleme se rezolvă de regulă în cadrul disciplinei "Mecanică Analitică" prin utilizarea formalismului Lagrange. După cunoștința autorului aceasta este prima culegere în care abordarea acestor probleme se face cu utilizarea legilor mecanicii clasice.

Problemele teoretice, dar și cele considerate de autor mai complicate, sau care au legătură cu problemele din alte capitole au fost marcate cu o steluță (*). Problemele din capitolele Unde elastice, respectiv Acustică, adresate în special studenților de la secțiile de Biofizică și Fizică Medicală au fost marcate cu o bulină (•).

Numărul mare de probleme și volumul important de calcule atrag posibilitatea existenței unor greșeli pentru care autorul este recunoscător tuturor celor care i le vor semnala.

În încheiere autorul mulțumește domnilor prof.univ.dr.doc. Mircea Sanduloviciu și conf.univ.dr. Dumitru Luca, referenții științifici ai lucrării, pentru răbdarea de a citi manuscrisul și pentru observațiile critice formulate.

Iași, 08 noiembrie 2002

lect.univ.dr. Sebastian POPESCU
Facultatea de Fizică
Universitatea „Al. I. Cuza" Iași

BCU IAȘI CENTRU UNIVERSITAR LIBRARY

Cuprins

I Enunțuri 1

1 OSCILAȚII MECANICE 3

1.1 Proprietăți generale. Oscilatorul liniar armonic 3
1.2 Pendulul matematic 10
1.3 Pendulul fizic 12
1.4 Pendulul de torsiune 14
1.5 Oscilații care implică rotația 15
1.6 Compunerea oscilațiilor 21
1.6.1 Compunerea oscilațiilor paralele 21
1.6.2 Compunerea oscilațiilor perpendiculare 22
1.7 Analiza Fourier 23
1.8 Oscilații amortizate 25
1.9 Oscilații forțate 28
1.10 Oscilații cu mai multe grade de libertate 31

2 UNDE ELASTICE 37

2.1 Proprietăți generale. Unde armonice 37
2.2 Reflexia și refracția undelor 40
2.3 Interferența undelor 41
2.4 Difracția undelor 45
2.5 Absorbția undelor 45
2.6 Dispersia undelor 46

3 ACUSTICĂ 47

3.1 Unde în gaze 47
3.2 Efectul Doppler 49
3.3 Unde de șoc 51
3.4 Calitățile sunetului 52
3.5 Surse sonore 53
3.5.1 Coarde elastice 53
3.5.2 Tuburi sonore 54

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

II Soluții 57

2 OSCILAȚII MECANICE 59

1.1 Proprietăţi generale. Oscilatorul liniar armonic 59
1.2 Pendulul matematic 81
1.3 Pendulul fizic 84
1.4 Pendulul de torsiune 95
1.5 Oscilaţii care implică rotaţia 100
1.6 Compunerea oscilaţiilor 115
1.6.1 Compunerea oscilaţiilor paralele 115
1.6.2 Compunerea oscilaţiilor perpendiculare 120
1.7 Analiza Fourier 126
1.8 Oscilaţii amortizate 133
1.9 Oscilaţii forţate 139
1.10 Oscilaţii cu mai multe grade de libertate 156

2 UNDE ELASTICE 177

2.1 Proprietăţi generale. Unde armonice 177
2.2 Reflexia şi refracţia undelor 190
2.3 Interferenţa undelor 194
2.4 Difracţia undelor 202
2.5 Absorbţia undelor 204
2.6 Dispersia undelor 205

3 ACUSTICĂ 213

3.1 Unde în gaze 213
3.2 Efectul Doppler 219
3.3 Unde de şoc 224
3.4 Calităţile sunetului 227
3.5 Surse sonore 229
3.5.1 Coarde elastice 229
3.5.2 Tuburi sonore 231

Bibliografie 235

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Partea I: Enunţuri

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1 OSCILAŢII MECANICE

1.1 Proprietăţi generale. Oscilatorul liniar armonic

1.1.1 Un expert a evaluat un obiect de artă la valoarea i^i milioane \$, unde $i = \sqrt{-1}$. Dacă aţi licita 200.000\$ pentru un asemenea obiect, ar fi această sumă mai mare decât valoarea la care a fost evaluat obiectul? Se cunoaşte că $e^{-\frac{\pi}{2}} \simeq 0,21$

1.1.2 Un corp execută o mişcare dată de legea

a) $x(t) = 4\sin^2\left(6\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ [cm]

b) $x(t) = 3\sin 3\pi t - 4\cos 3\pi t$ [cm].

Să se demonstreze că mişcarea este una oscilatorie armonică şi să se calculeze amplitudinea, faza iniţială, perioada şi viteza mişcării.

1.1.3 O particulă oscilează cu frecvenţa ν şi amplitudinea A. Să se determine viteza particulei când elongaţia este egală cu jumătatea amplitudinii.

1.1.4 Un corp efectuează oscilaţii armonice cu pulsaţia ω. Să se determine amplitudinea şi faza iniţială a oscilaţiilor dacă la $t = 0$, $x = x_0$ şi $v = v_0$.

1.1.5 Un corp efectuează oscilaţii armonice. Să se determine amplitudinea şi perioada oscilaţiilor dacă pentru $x = x_1$, $v = v_1$, iar pentru $x = x_2$, $v = v_2$.

1.1.6 Să se determine amplitudinea de oscilaţie a unui corp dacă la un mement dat raportul dintre pătratul vitezei şi acceleraţie are valoarea α, iar diferenţa dintre amplitudine şi elongaţie este β.

1.1.7 Un oscilator liniar cu masa $m = 1$ g se află iniţial în poziţia de echilibru. Energia cinetică maximă a oscilatorului este $E_{c\max} = 4,5 \cdot 10^{-7}$ J, iar după $t_1 = 0,21$ s ($\simeq \pi/15$) de la începerea mişcării elongaţia este $x_1 = 4$ mm. Dacă amplitudinea oscilaţiilor este $A = 6$ mm, să se scrie ecuaţia de mişcare a oscilatorului.

1.1.8 Să se calculeze amplitudinea oscilaţiilor armonice ale unui sistem mecanic ştiind că energia sa totală este 50 mJ, iar forţa care acţionează asupra sa în momentul când elongaţia este jumătate din amplitudine este de 5 N.

BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.1.9 Un corp efectuează oscilaţii armonice cu amplitudinea A. În momentul în care elongaţia este jumătate din amplitudine, un şoc instantaneu face ca viteza corpului să se dubleze. Să se calculeze noua amplitudine a mişcării.

1.1.10 Un corp cu masa m este suspendat de un resort ideal cu constanta elastică k şi masa neglijabilă. Utilizând argumente dimensionale să se determine perioada oscilaţiilor corpului.

1.1.11 Să se determine perioada oscilaţiilor unui pendul elastic doar cu ajutorul unei rigle.

1.1.12 Dacă de capătul unui resort ideal se suspendă un corp cu masa de 1 kg, acesta se alungeşte cu 10 cm. Să se determine perioada oscilaţiilor unui corp cu masa de 500 g suspendat de acest resort. Se dă $g = 9.8$ m/s^2.

1.1.13 Un corp este suspendat de două resorturi ideale cu constantele elastice k_1, respectiv k_2. Să se afle relaţia dintre cele două constante elastice dacă raportul perioadelor de oscilaţie ale sistemului cu resorturile în serie, respectiv în paralel este minim.

1.1.14 Un corp cu masa m se află pe o suprafaţă orizontală netedă între doi pereţi verticali de care este prins prin câte două resorturi ideale, identice, fiecare cu constanta elastică k, montate în paralel. Să se determine perioada oscilaţiilor corpului.

1.1.15 Un corp cu masa $m = 4$ kg este suspendat de un resort ideal ce are constanta elastică $k = 900$ N/m. Corpul este împins în sus pe distanţa 50 mm faţă de poziţia de echilibru şi apoi eliberat din repaus. Aflaţi ecuaţia care descrie mişcarea corpului.

1.1.16 Un corp cu masa $m = 0,8$ kg este suspendat de un resort ideal cu constanta elastică $k = 80$ N/m. Dacă se imprimă corpului o viteză $v = 0,8$ m/s în momentul când acesta este deasupra poziţiei de echilibru cu 4 cm, să se determine ecuaţia de mişcare a corpului. Se va considera că viteza aplicată este orientată spre poziţia de echilibru a corpului.

1.1.17 Să se demonstreze că traiectoria în spaţiul fazelor (x, v) a punctului reprezentativ ce dă starea unui oscilator liniar armonic este o elipsă.

1.1.18 Amplitudinea oscilaţiilor unui oscilator liniar armonic orizontal, cu masa corpului m şi constanta de elasticitate a resortului k, este A. La distanţa $A/2$ de poziţia de echilibru este fixat un perete vertical masiv cu care corpul se ciocneşte perfect elastic. Să se determine perioada oscilaţiilor în acest caz.

1.1.19 Un corp cu masa $m = 0,8$ kg este suspendat de două resorturi ideale identice, fiecare cu constanta elastică $k = 40$ N/m, astfel încât la echilibru sistemul arată ca în Fig. 1.1.19, valoarea unghiului α fiind 45^0. Să se determine:

a) alungirea resorturilor la echilibru;

b) perioada oscilaţiilor verticale ale corpului.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

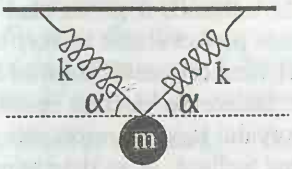


Fig. 1.1.19

1.1.20 Un corp alunecă fără viteză inițială pe un plan neted, înclinat sub un unghi α față de orizontală. Parcurgând distanța L, corpul se alipește de capătul liber al unui resort ideal situat de-a lungul planului înclinat, celălalt capăt al acestuia fiind fixat la baza planului înclinat. Cunoscând distanța l de comprimare maximă a resortului, să se determine timpul cât durează comprimarea.

1.1.21 Două resorturi ideale cu constantele k_1, respectiv k_2 sunt legate în paralel, având câte un capăt prins de un perete vertical, iar celălalt de un corp cu masa m ce se poate mișca fără frecare pe un plan orizontal. Inițial corpul este menținut în repaus, primul resort fiind alungit cu l_1, iar al doilea comprimat cu l_2. Să se scrie ecuația de mișcare a corpului.

1.1.22 Un corp cu masa $M = 2$ kg se află în repaus pe un plan orizontal neted și este legat de un perete vertical printr-un resort ideal cu constanta elastică $k = 800$ N/m. Corpul cu masa M este ciocnit elastic și central de un alt corp cu masa $m = 1$ kg, a cărui viteză inițială este $v_0 = 60$ m/s. Să se determine:

a) perioada oscilațiilor corpului cu masa M;

b) amplitudinea oscilațiilor;

c) intervalul de timp după care corpurile se despart.

1.1.23 Un resort elastic ideal, suspendat vertical, are legat la capătul liber un corp cu masa m_1, perioada oscilațiilor armonice fiind T_1. Dacă se adaugă o masă suplimentară m_2, resortul se alungește cu h, iar pendulul oscilează cu perioada T_2. Știind că diferența între perioadele de oscilație este ΔT, să se afle:

a) constanta elastică a resortului;

b)perioadele T_1 și T_2;

c) masa m_2;

d) valoarea constantei elastice a unui alt resort care să oscileze cu perioada T_1 când are suspendate la capătul liber ambele mase.

1.1.24 Un resort elastic ideal este suspendat vertical. Dacă la capătul său liber se leagă un platan cu masa m alungirea resortului este h. De la înălțimea $2h$, măsurată față de platan, cade liber un corp cu masa m. La același moment se aruncă în sus de sub platan un corp identic cu primul, cu viteza inițială v_0, astfel încât cele două corpuri ciocnesc plastic platanul în același moment. Să se calculeze v_0 astfel încât sistemul să oscileze cu amplitudinea $A = h\sqrt{5}$.

BCU Cluj / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.1.25 Un corp coboară de la înălţimea h pe un plan înclinat neted. Ajuns la baza acestuia, corpul ciocneşte perfect elastic un corp identic aflat pe planul orizontal, corp legat de un resort ideal orizontal. Capătul liber al resortului este legat de un perete verical, iar înainte de ciocnire resortul era nedeformat. Ştiind că perioada oscilaţiilor corpului legat de resort este egală cu timpul de coborâre al primului corp pe planul înclinat, să se determine amplitudinea oscilaţiilor. Se neglijează frecările pe planul orizontal.

1.1.26 Un corp cu masa m se poate mişca pe un plan orizontal neted între două resorturi ideale, orizontale, identice, cu constanta elastică k, care au câte un capăt fixat de câte un perete vertical. Distanţa dintre capetele libere ale resorturilor este $2x_0$, iar comprimarea maximă a acestora de către corp este x_0. Să se determine perioada acestor oscilaţii ale corpului.

1.1.27 Un corp cu masa m, aflat pe un plan orizontal neted, este legat de un perete vertical printr-un resort ideal, orizontal, cu constanta elastică k_1. De faţa opusă a corpului este legat orizontal un alt resort ideal a cărui constantă elastică este k_2. Iniţial resorturile sunt nedeformate. Dacă se apasă brusc capătul liber al celui de-al doilea resort pe o distanţă a şi se fixează apoi acest capăt cu un opritor, să se afle:

a) perioada oscilaţiilor corpului;

b) noua poziţie de echilibru a corpului;

c) amplitudinea oscilaţiilor efectuate de corp.

1.1.28 Pe o masă orizontală se află o cutie cu masa M. În cutie, de capac, este suspendat un resort ideal cu constanta elastică k de care este agăţat un corp cu masa m. Pentru ce amplitudine a oscilaţiilor corpului cutia se desprinde de masă?

1.1.29 Cu ce frecvenţă va oscila un băţ vertical cu masa $m = 0,2$ kg şi cu aria secţiunii transversale $S = 5$ cm^2 care pluteşte în poziţie verticală la suprafaţa apei. Se cunosc: densitatea apei $\rho_0 = 1000$ kg/m^3 şi valoarea acceleraţiei gravitaţionale $g = 10$ m/s^2.

1.1.30 Două plane înclinate netede, unul cu unghiul diedru α şi celălalt β, sunt aşezate vârf la vârf pe o masă orizontală. Un corp cu masa m este aştezat la înălţimea h pe primul plan înclinat. Să se determine perioada oscilaţiilor corpului.

1.1.31 O masă m de lichid cu densitatea ρ se află într-un tub vertical curbat, cu secţiunea constantă S, ale cărui ramuri fac cu verticala unghiurile ascuţite α, respectiv β. Să se afle perioada micilor oscilaţii ale masei de lichid.

1.1.32 Pe o pană cu unghiul diedru $\alpha = 0,1$ rad este aşezat un corp în repaus. Coeficientul de frecare la alunecare dintre corp şi pană este $\mu = 0,28$. Pana este pusă în oscilaţie după direcţia paralelă cu planul înclinat, amplitudinea mişcării oscilatorii fiind $A = 5$ cm. Care este frecvenţa minimă de oscilaţie a penei pentru care corpul începe să alunece pe planul înclinat?

BCU IAŞI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.1.33 O scândură orizontală, pe care se află un corp în repaus, oscilează armonic cu frecvenţa $\nu = 10$ Hz pe o direcţie ce face un unghi $\alpha = 45^0$ cu verticala. Cunoscând coeficientul de frecare $\mu = 0,5$ dintre corp şi scândură, să se determine amplitudinea minimă a oscilaţiilor scândurii pentru care:

a) corpul începe să se mişte pe scândură;

b) corpul se desprinde de scândură.

1.1.34 Un corp cu masa M, aflat pe un plan orizontal neted între doi pereţi verticali paraleli, este legat de aceştia prin câte un resort ideal orizontal, fiecare având constanta elastică k. La echilibru resorturile sunt nedeformate. Se perturbă sistemul, iar în momentul trecerii corpului prin poziţia de echilibru pe acesta se aşează un corp cu masa m. Să se afle:

a) raportul amplitudinilor de oscilaţie ale corpului în cele două cazuri.

b) amplitudinea maximă de oscilaţie în cazul al doilea astfel încât corpul cu masa m să nu alunece pe corpul cu masa M. Se cunoaşte coeficientul de frecare la alunecare μ între cele două corpuri.

1.1.35 Prin suspendarea unui corp cu masa $m = 2$ kg la mijlocul unui fir elastic orizontal cu lungimea iniţială $2l_0 = 30$ cm, în acesta apare o tensiune $T_0 = 20$ N. Să se determine:

a) unghiul făcut de fir cu verticala în poziţia de echilibru a corpului;

b) constanta elastică a firului elastic;

c) perioada micilor oscilaţii ale corpului în jurul poziţiei de echilibru.

1.1.36 Un corp punctiform, deplasându-se pe un arc de cicloidă verticală $[x = R(\theta - \sin\theta)\,,\ y = R(1 + \cos\theta)]$, oscilează sub acţiunea propriei greutăţi. Să se demonstreze că oscilaţiile acestui pendul cicloidal sunt izocrone şi să se deducă perioada oscilaţiilor.

1.1.37 Peste un scripete ideal este trecută o frânghie omogenă cu masa m şi lungimea l. Un capăt al frânghiei atârnă liber, iar celălalt este legat de un resort vertical cu masa neglijabilă şi constanta de elasticitate k. Neglijând frecările, să se determine:

a) condiţia necesară pentru ca frânghia să poată efectua oscilaţii longitudinale;

b) perioada oscilaţiilor longitudinale ale frânghiei în condiţiile de la punctul (a).

1.1.38 Un poligon regulat are ca laturi n resorturi ideale identice cu constanta elastică k, iar în vârfuri câte un corp cu masa m. Sistemul poate oscila astfel încât la orice moment poligonul este asemenea cu cel iniţial. Să se determine perioada acestor oscilaţiilor.

1.1.39 Un corp este lăsat să cadă printr-un tunel săpat în Pământ dintr-o parte în cealaltă a acestuia. Să se demonstreze că mişcarea corpului prin tunel este una

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

oscilatorie armonică şi să se determine perioada acestor oscilaţii. Se va considera Pământul o bilă omogenă cu densitatea $\rho = 5522\ \mathrm{kg/m^3}$. Tunelul nu trebuie neapărat să treacă prin centrul Pământului, iar frecările se neglijează. Se cunoaşte constanta atracţiei gravitaţionale $k_g = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kg \cdot s^2}}$.

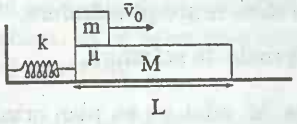


Fig. 1.1.40

1.1.40 Să se stabilească ecuaţia de mişcare pentru scândura cu masa M din Fig. 1.1.40, dacă lungimea ei este $L = \frac{\mu g}{k}\left(\frac{\pi^2}{2}M - 2m\right)$, iar corpul cu masa $m < M$ este lansat pe scândură cu viteza iniţială $v_0 = \pi\mu g\sqrt{M/k}$. Există frecare doar între corp şi scândură, iar resortul este ideal. Iniţial scândura este în repaus, iar resortul nedeformat.

1.1.41 Să se determine perioada micilor oscilaţii ale sistemului din Fig. 1.1.41. Scripetele şi resortul sunt ideale, configuraţia reprezentată corespunde stării de echilibru, iar frecările sunt neglijabile.

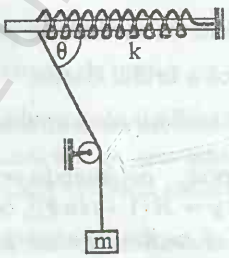


Fig. 1.1.41

⋆1.1.42 Pe un plan orizontal fără frecări se află un corp cu masa M. Corpul este prins de un perete vertical prin intermediul unui resort real cu constanta elastică k şi masa m mult mai mică decât masa corpului (astfel încât resortul să se poată întinde uniform pe toată lungimea sa, iar spirele să oscileze în fază). Să se determine perioada micilor oscilaţii ale corpului.

1.1.43 Potenţialul 6-12, sau potenţialul Lenard-Jones $E_p = -\frac{2A}{r^6} + \frac{B}{r^{12}}$ este utilizat pentru a descrie interacţiunea dintre atomii unei molecule diatomice. A şi B sunt constante pozitive, iar r este distanţa interatomică. Dacă molecula are atomi identici cu masele egale cu m, pentru deplasări mici ale atomilor faţă de poziţia de echilibru, să se determine:

a) lungimea r_0 a legăturii chimice la echilibru;

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

B.C.U. „M. EMINESCU" IAŞI FIZICĂ

b) starea de energie minimă a moleculei şi să se reprezinte grafic energia potenţială a moleculei;

c) constanta elastică echivalentă a legăturii chimice dintre atomi;

d) perioada oscilaţiilor atomilor.

1.1.44 O particulă cu masa m se mişcă de-a lungul axei $0x$ şi trece prin origine cu viteza v_0. Energia potenţială a particulei este $E_p = a + bx^2$, unde a şi b sunt constante.

a) Să se demonstreze că mişcarea este oscilatorie.

b) Să se calculeze frecvenţa oscilaţiilor.

c) Să se calculeze amplitudinea oscilaţiilor particulei.

1.1.45 O particulă cu masa m se mişcă în câmpul a cărui energie potenţială este

$$E_p = \begin{cases} \frac{1}{2}kx^2 & , x < 0 \\ mgx & , x \geq 0 \end{cases}$$

a) Care este energia totală a particulei astfel încât oscilaţiile efectuate de aceasta să fie simetrice faţă de origine?

b) Să se calculeze perioada oscilaţiilor particulelor.

1.1.46 Să se determine perioada micilor oscilaţii în jurul poziţiei de echilibru ale unei particlule cu masa m aflată în câmpul a cărui energie potenţială este:

a) $E_p(x) = a(1 - \cos bx)$;

b) $E_p(x) = a(x^{-2} - bx^{-1})$

c) $E_p(x) = (1 - ax)\, e^{-ax}$.

Mărimile a şi b sunt constante pozitive.

1.1.47 Să se determine perioada micilor oscilaţii unidimensionale în jurul poziţiei de echilibru ale unui corp cu masa m aflată în câmpul a cărui energie potenţială este:

a) $E_p(x) = a\mathrm{tg}^2 bx$;

b) $E_p(x) = -\frac{a}{\mathrm{ch}^2 bx}$.

Mărimile a şi b sunt constante pozitive.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.2 Pendulul matematic

1.2.1 Utilizând argumente dimensionale, să se deducă perioada oscilaţiilor unui pendul matematic format dintr-un fir cu lungimea l ce are legat la capăt un corp cu masa m. Se cunoaşte valoarea acceleraţiei gravitaţionale g.

1.2.2 Un corp cu masa m, suspendat de un fir inextensibil, cu masa neglijabilă şi lungimea l, este pus în mişcare de oscilaţie. Admiţând că oscilaţiile sunt izocrone, să se determine puterea medie a acestui pendul, dacă iniţial corpul este deviat cu unghiul mic θ_0 şi eliberat din repaus.

prof. Panaite Forţu

1.2.3 Un corp cu masa m, aflat pe o masă orizontală netedă, are legat deasupra un resort vertical nedeformat, celălalt capăt al acestuia fiind fixat. Să se afle amplitudinea oscilaţiilor orizontale ale corpului, dacă se cunosc perioada oscilaţiilor proprii ale acestui pendul elastic T_1, ca şi perioada $T_2 > T_1$ a unui pendul matematic a cărui lungime este egală cu lungimea resortului nedeformat.

1.2.4 De un perete plan, înclinat uşor cu unghiul α faţă de verticală este legat un pendul matematic cu lungimea l. Să se determine perioada micilor oscilaţii ale pendulului, dacă la momenul iniţial acesta este deviat cu unghiul mic β faţă de verticală. Ciocnirea corpului legat de fir cu peretele se consideră perfect elastică.

1.2.5 Pe un plan înclinat sub unghiul α faţă de orizontală se află un pendul matematic cu lungimea l având capătul firului legat de vârful planului. Să se dtermine perioada micilor oscilaţii ale pendulului.

1.2.6 Axa unei pânze conice cu semideschiderea unghiulară β este înclinată cu unghiul α faţă de orizontală. În interiorul conului, de vârful acestuia este legat un fir cu masa neglijabilă şi cu lungimea l ce are la capăt un corp punctiform. Să se determine perioada micilor oscilaţii ale acestui pendul matematic pe suprafaţa internă a pânzei conice.

1.2.7 Un corp se poate mişca fără frecare şi fără rostogolire în plan vertical, în interiorul unei cavităţi sferice cu raza R. Să se determine perioada micilor oscilaţii ale corpului.

1.2.8 Firele care alcătuiesc pendulul dublu din Fig. 1.2.8 sunt nedeformabile. Să se determine perioada oscilaţiilor pendulului astfel format.

BCU "AL. I. CUZA" IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

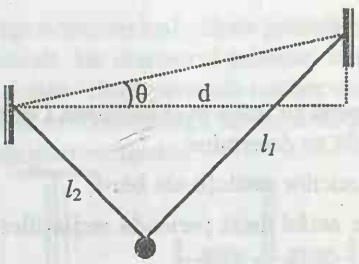


Fig. 1.2.8

1.2.9 Pe un plan neted, înclinat sub un unghi α faţă de orizontală, este menţinut în repaus un cărucior pe care este instalat un pendul matematic de lungime l. Neglijând masa pendulului faţă de masa căruciorului, să se determine distanţa parcursă de cărucior spre baza planului în intervalul de timp în care pendulul efectuează primele N oscilaţii complete.

1.2.10 O platformă pe care este montat un pendul matematic se mişcă pe un plan orizontal cu viteză constantă. Planul orizontal se continuă cu un plan care face cu orizontala un unghi α. Să se determine raportul perioadelor de oscilaţie ale pendulului pe planul orizontal şi pe planul înclinat, cunoscând coeficientul de frecare μ dintre platformă şi planul înclinat.

1.2.11 Un pendul matematic este compus dintr-o bară rigidă, cu masa neglijabilă şi cu lungimea l_1, având la capăt un corp cu masa m_1. La distanţa l_2 de punctul de suspensie se lipeşte de bară un corp cu masa m_2. Să se determine perioada de oscilaţie a pendulului în acest caz.

1.2.12 O tijă dreaptă şi cu masa neglijabilă poate oscila în plan vertical, fiind suspendată de unul din capete. Ataşând de tijă două corpuri punctiforme identice, o dată ambele la capătul liber al tijei şi apoi unul la capătul tijei, iar celălalt la mijlocul acesteia, să se determine raportul perioadelor de oscilaţie ale celor două pendule.

1.2.13 Peste un scripete ideal este trecut un fir cu masa neglijabilă la capetele căruia sunt legate două corpuri cu masele m_1, respectiv $m_2 < m_1$. Corpul cu masa m_1 este deviat uşor de la poziţia verticală şi apoi lăsat liber. Dacă iniţial lungimea porţiunii de fir de care este suspendat corpul cu masa m_1 este egală cu l_1, să se exprime perioada de oscilaţie a acestuia în funcţie de timp.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.3 Pendulul fizic

1.3.1 O bară omogenă cu masa m şi lungimea l este suspendată la distanţa x de unul din capete. Să se determine:

a) perioada micilor oscilaţii ale barei;

b) distanţa x astfel încât perioada oscilaţiilor să fie minimă.

⋆1.3.2 Un corp cu masa m este suspendat deasupra centrului de masă, la o distanţă l de acesta. Momentul de ineţie al corpului faţă de axa de suspensie este I. Să se determine:

a) raza de giraţie k_c corespunzătoare momentului de inerţie faţă de axa centrală paralelă cu axa de suspensie;

b) Să se determine distanţa l' de la centrul de masă la centrul de oscilaţie al pendulului.

⋆1.3.3 Să se demonstreze că lipind un corp cu masa oarecare în centrul de oscilaţie al unui pendul fizic perioada de oscilaţie a acestuia nu se modifică.

1.3.4 Un pendul fizic este rotit cu 180^0 faşă de poziţia verticală de echilibru. Lăsat liber pendulul trece prin poziţia de echilibru cu viteza unghiulară $\omega = 8\pi\ s^{-1}$. Să se determine perioada micilor oscilaţii ale pendulului.

1.3.5 Două pendule fizice suspendate de o axă de rotaţie au momentele de inerţie I_1, respectiv I_2, iar perioadele micilor oscilaţii sunt T_1, respectiv T_2. După suprapunerea rigidă a celor două pendule, astfel încât să se păstreze în fiecare caz distanţa de la axa de rotaţie la centrele lor de masă, să se calculeze perioada oscilaţiilor acestui pendul compus.

1.3.6 Un pendul fizic constă dintr-un disc omogen cu masa m şi raza R care se continuă cu o tijă subţire cu masa neglijabilă. Punctul de suspensie se află la capătul liber al tijei. Care este valoarea distanţei L de la centrul discului la punctul de suspensie astfel încât perioada micilor oscilaţii ale pendulului să fie minimă?

1.3.7 Un pendul fizic constă dintr-o tijă uşoară cu lungimea l suspendată la un capăt, la celălalt capăt având o sferă goală cu raza R şi masa neglijabilă. Sfera este plină cu apă. De câte ori creşte perioada micilor oscilaţii ale pendulului dacă apa îngheaţă? Se neglijează variaţia volumului apei prin solidificare.

1.3.8 Un pendul fizic oscilează cu pulsaţia ω_1. Dacă la distanţa d de axa de suspensie se ataşează pendulului un corp cu masa m, pulsaţia oscilaţiilor devine ω_2, să se determine momentul de inerţie al pendulului faţă de axa de rotaţie.

1.3.9 O bară rigidă cu masa m şi lungimea l, având la un capăt un corp punctiform cu masa M, este suspendată la capătul liber prin intermediul unei articulaţii mobile. Ştiind că sistemul poate oscila în plan vertical, să se determine lungimea redusă a acestui pendul fizic. Discuţie.

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.3.10 Două inele circulare sunt suspendate verical. Masa primului inel este de patru ori mai mică decât masa celuilalt, iar diametrul primului inel este de patru ori mai mic decât al celui de-al doilea. Dacă perioada micilor oscilaţii ale primului inel este T, să se afle perioada micilor oscilaţii ale celui de-al doilea inel. Cele două inele oscilează în acelaşi plan vertical.

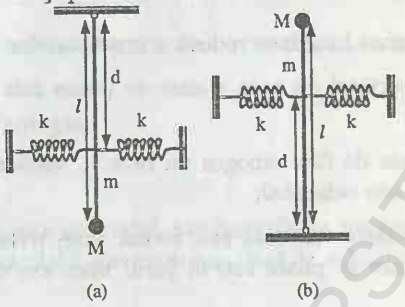


Fig. 1.3.11

1.3.11 Să se determine perioada micilor oscilaţii ale sistemelor din Fig. 1.3.11. Pentru sistemul din Fig. 1.3.11(b) să se afle şi deformaţiile celor două resorturi în starea de echilibru.

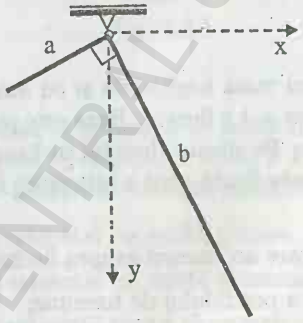


Fig. 1.3.12

1.3.12 Fie bara cotită din Fig. 1.3.12. Să se determine:

a) poziţia centrului de masă al barei faţă de punctul de suspensie la echilibru;

b) perioada micilor oscilaţii ale barei.

1.3.13 O bară rigidă cu lungimea $2L$ şi masa neglijabilă are la capete câte un corp punctiform cu masa m_1, respectiv m_2. Bara este îndoită astfel încât cele două laturi au lungimi egale şi fac între ele unghiul 2θ. Bara este suspendată la mijlocul ei şi poate efectua oscilaţii în plan vertical. Să se determine:

a) perioada micilor oscilaţii ale sistemului;

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

b) cât devine această perioadă dacă $\theta = \pi/2$.

1.3.14 Să se demonstreze că un inel şi un fragment al acestuia, ambele suspendate vertical şi puse să oscileze în planul vertical ce le conţine, au acceaşi lungime redusă. Fragmentul de inel este suspendat simetric.

1.3.15 Să se determine lungimea redusă a următoarelor pendule fizice:

a) un inel vertical cu raza r care se poate roti în jurul tangentei orizontale superioare;

b) o jumătate de disc omogen cu raza r, vertical, care se poate roti în jurul diametrului său orizontal;

c) o placă plană verticală sub forma unui triunghi echilateral cu latura de lungime l, care se poate roti în jurul unei axe orizontale ce trece printr-una din laturi;

d) o placă plană verticală sub forma unui pătrat cu latura de lungime l, care se poate roti în jurul unei axe orizontale ce trece printr-una din laturi.

1.4 Pendulul de torsiune

1.4.1 La capetele unei bare cu masa neglijabilă şi cu lungimea $d = 1$ m sunt fixate două bile mici cu masa $m = 1$ g fiecare. Bara este prinsă orizontal la mijlocul ei printr-un fir de torsiune. Pe aceeaşi direcţie cu bara, la distanţa $L = 16$ cm de fiecare din capetele ei, este fixată câte o bilă mare cu masa $M = 20$ kg fiecare. Să se determine:

a) forţa gravitaţională care acţionează asupra fiecărui corp cu masa m;

b) perioada de oscilaţie a pendulului de torsiune;

c) lungimea unui pendul matematic care ar oscila cu acceaşi perioadă ca şi pendulul de torsiune.

1.4.2 Un pendul bifilar constă dintr-o bară rectilinie, omogenă, cu masa m şi lungimea l, suspendată orizontal de capete cu două fire verticale, cu mase neglijabile, fiecare cu lungimea L. Să se determine perioda oscilaţiilor de torsiune ale pendulului bifilar şi să se compare această perioadă cu cea obţinută în cazul în care bara pendulează.

1.4.3 Un disc omogen cu masa m şi raza R este suspendat orizontal cu patru fire uşoare, cu lungimea l, aşezate vertical şi prinse în patru puncte aşezate simetric pe periferia sa. Să se determine perioada micilor oscilaţii de torsiune ale pendulului astfel format.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.4.4 O placă sub forma unui poligon regulat cu n laturi, fiecare cu lungimea a este suspendată în poziţie orizontală cu ajutorul a n fire inextensibile, cu masele neglijabile, fiecare cu lungimea l, legate de vârfurile plăcii. Să se determine perioada micilor oscilaţii de torsiune ale plăcii.

1.5 Oscilaţii care implică rotaţia

1.5.1 Sistemul din Fig. 1.5.1 este orizontal, iar frecările se neglijează. Să se determine perioada micilor oscilaţii ale corpului, dacă la echilibru resorturile sunt nedeformate.

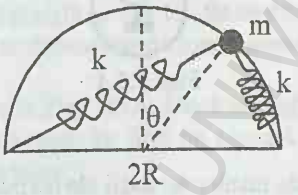


Fig. 1.5.1

1.5.2 Un disc omogen cu masa m şi raza R se poate rostogoli pe un plan orizontal. Un resort ideal orizontal cu constanta elastică k leagă centrul discului de un perete vertical. Să se determine perioada micilor oscilaţii ale discului dacă:

a) între disc şi planul orizontal nu există frecare;

b) între disc şi planul orizontal nu există alunecare;

c) între disc şi planul orizontal există alunecare.

1.5.3 Să se determine perioada micilor oscilaţii ale sistemului din figură, dacă tija are masa m şi lungimea L şi să se aleagă un resort, astfel încât, împreună cu corpul cu masa M să formeze un oscilator izocron cu sistemul dat.

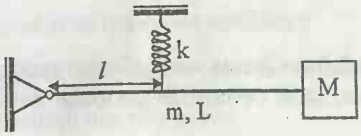


Fig. 1.5.3

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.5.4 Dacă scripetele din sistemul reprezentat în Fig. 1.5.4 este un disc omogen, să se determine:

a) alungirea resortului corespunzătoare poziţiei de echilibru a sistemului;

b) condiţiile în care sistemul oscilează;

c) perioada micilor oscilaţii ale sistemului în condiţiile de la punctul precedent.

În desenul din figură resortul nu este deformat.

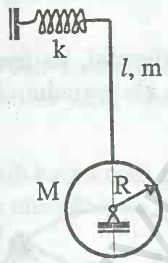


Fig. 1.5.4

1.5.5 Să se determine perioada micilor oscilaţii ale corpului cu masa m din Fig. 1.5.5, ştiind că în toate cazurile scripeţii au forma unor discuri, iar firele au masa neglijabilă şi nu alunecă pe discuri.

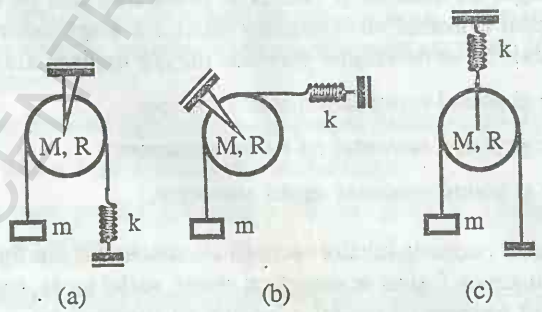


Fig. 1.5.5

1.5.6 Discurile din Fig. 1.5.6 au forma unor discuri omogene. În condiţiile în care resorturile sunt ideale, să se determine perioada micilor oscilaţii ale sistemulor desenate.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

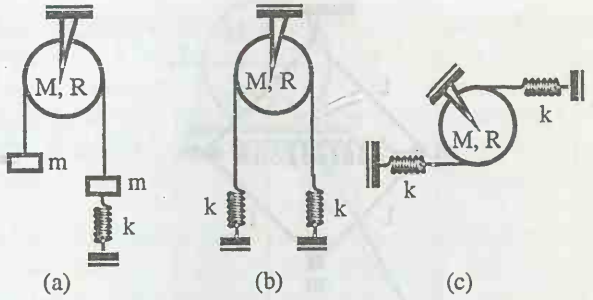


Fig. 1.5.6

1.5.7 O scândură omogenă cu grosimea $h = 2$ cm este aşezată orizontal pe doi cilindri orizontali, cu aceeaşi rază, care se rotesc cu aceeaşi viteză unghiulară, dar în sensuri opuse. Distanţa dintre axele cilindrilor este $l = 20$ cm, iar coeficientul de frecare dintre cilindri şi riglă $\mu = 0,18$. Să se demonstreze că rigla va efectua oscilaţii armonice şi să se determine perioada acestor oscilaţii.

1.5.8 Fie sistemul reprezentat în Fig. 1.5.8. Dacă se neglijează frecarea dintre corpul cu masa m_1 şi planul orizontal, iar firul nu alunecă pe scripetele asimilat cu un disc omogen, să se determine:

a) alungirea resortului la echilibru;

b) perioada micilor oscilaţii ale sistemului în jurul poziţiei de echilibru.

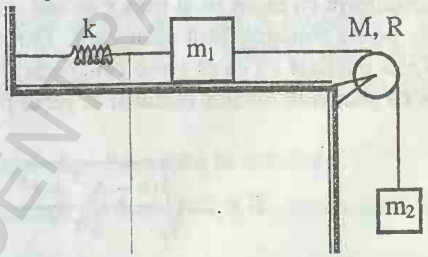


Fig. 1.5.8

1.5.9 În sistemul din Fig. 1.5.9 tijele au masa neglijabilă, cele trei corpuri au masele identice, iar în starea de echilibru tijele formează un pătrat. Să se determine:

a) comprimarea resortului în starea de echilibru;

b) masele corpurilor, dacă lungimea resortului nedeformat este $3L$;

c) perioada micilor oscilaţii ale sistemului.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

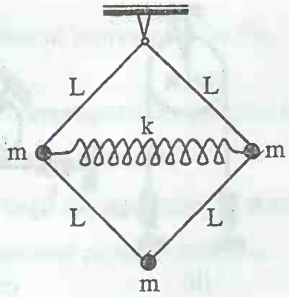


Fig. 1.5.9

1.5.10 Un corp cu masa m se poate mişca fără frecare pe o tijă orizontală. Corpul este prins de fiecare din capetele ei prin câte un resort având constanta elastică k_1, respectiv k_2. La echilibru corpul se află la mijlocul tijei, iar resorturile sunt nedeformate.

a) Care este perioada oscilaţiilor corpului în jurul poziţiei sale de echilibru?

b) Care este perioada oscilaţiilor dacă sistemul se pune în rotaţie uniformă cu viteza unghiulară ω?

1.5.11 Un cilindru neuniform cu masa m şi raza r se află culcat pe o suprafaţă orizontală pe care se poate rostogoli fără alunecare. Distanţa dintre axa de simetrie geometrică şi axa paralelă cu ea ce trece prin centrul de masă al cilindrului este h. Să se arate că perioada micilor oscilaţii în jurul poziţiei de echilibru este

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(r-h)^2 + k^2}{gh}}$$

unde k este raza de giraţie a cilindrului faţă de axa care trece prin centrul de masă şi este paralelă cu axa de simetrie geometrică.

1.5.12 Un cilindru omogen cu masa M se poate rostogoli fără alunecare pe marginea unei mese orizontale. O bară cu masa neglijabilă şi cu lungimea l, având la un capăt un corp punctiform cu masa m, are celălalt capăt fixat pe axa cilindrului (Fig. 1.5.12). Să se determine lungimea redusă a acestui pendul.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

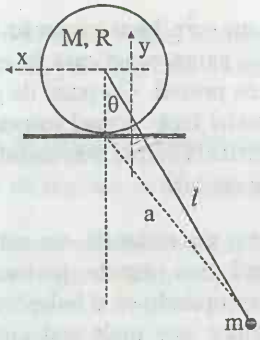


Fig. 1.5.12

1.5.13 Să se afle perioada micilor oscilaţii pentru:

a) o jumătate de bilă omogenă cu raza R;

b) o jumătate de sferă cu raza R;

c) o jumătate de cilindru omogen cu raza R obţinut prin tăierea cilindrului de-a lungul axei sale de simetrie;

d) o pătură semicilindrică cu raza R.

Toate aceste corpuri se află cu suprafaţa convexă pe o suprafaţă orizontală, iar alunecarea lipseşte.

1.5.14 O bară cilindrică din lemn cu aria secţiunii S, lungimea L şi densitatea ρ este total scufundată într-un bazin plin cu un lichid cu densitatea ρ_0. Centrul bazei barei este legat de fundul bazinului prin intermediul unei articulaţii mobile. Să se determine:

a) reacţiunea articulaţiei când bara este în echilibru;

b) perioada micilor oscilaţii ale barei, după scoaterea acesteia din echilibru.

1.5.15 Să se determine perioada micilor oscilaţii ale unei bile cu raza r care se rostogoleşte fără alunecare în interiorul unei cavităţi cilindrice cu raza R.

1.5.16 Pe un cilindru culcat, cu raza R, imobil, se află un cub omogen cu latura l. În condiţiile în care cubul nu alunecă pe cilindru, să se determine:

a) condiţia în care echilibrul cubului pe cilindru este stabil;

b) perioada micilor oscilaţii ale cubului pe cilindru.

1.5.17 Să se rezolve problema precedentă în condiţiile în care cubul este înlocuit cu o halteră formată dintr-o tijă dreaptă cu lungimea l şi masa neglijabilă ce are la capete câte un corp punctiform cu masa m.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

⋆1.5.18 Pe o masă netedă se află un corp legat cu un fir inextensibil şi cu masa neglijabilă. Firul trece printr-o gaură practicată în masă, iar la capătul său liber este legat un corp identic cu primul. Corpului de pe masă i se imprimă o viteză unghiulară constantă ω, astfel încât corpul suspendat să se afle în repaus. Deplasând foarte puţin pe verticală corpul suspendat, acesta va începe să oscileze. Să se afle perioada acestor oscilaţii.

⋆1.5.19 Ca urmare a impactului cu un meteorit, un satelit care evolua pe o orbită circulară cu raza R în jurul unei planete, perioada de rotaţie fiind T, începe să oscileze pe traiectorie, apropiindu-se şi îndepărtându-se periodic de planetă. Dacă amplitudinea oscilaţiilor este mult mai mică decât R, să se determine perioada acestora.

⋆1.5.20 O particulă cu masa m este constrânsă să se mişte fără frecare pe suprafaţa interioară a unei pânze conice pe o orbită circulară în jurul axei verticale de simetrie a pânzei conice. Dacă pânza conică are vârful în jos, semideschiderea unghiulară α, iar distanţa de la vârful său la particulă este permanent r_0, se cer:

a) să se determine viteza unghiulară de rotaţie a particulei;

b) să se arate că această orbită este stabilă şi să se calculeze perioada micilor oscilaţii ale particulei în jurul orbitei iniţiale.

⋆1.5.21 Un corp cu masa m este legat de un punct fix cu ajutorul unui resort ideal cu constanta elastică k. Corpul este forţat să execute o mişcare circulară în planul orizontal ce conţine şi punctul fix cu viteza unghiulară ω. Dacă se imprimă corpului un mic impuls radial, acesta va începe să oscileze. Să se calculeze pulsaţia acestor oscilaţii.

⋆1.5.22 Presupunând că Soarele este înconjurat de un nor de praf extins în spaţiu, astfel încât Pământul să se afle în interiorul acestuia, pe lângă potenţialul gravitaţional familiar produs de Soare $V = -k\frac{M}{r}$, norul adaugă un termen mic de forma $V = \frac{\alpha r^2}{2}$, α fiind o constantă pozitivă cu valoare mică. După cum se ştie, Pământul se roteşte în jurul Soarelui pe o orbită practic circulară cu raza r_0, iar efectul prafului este o precesie lentă a orbitei sale. Cunoscând masa m a Pământului şi viteza sa unghiulară ω_0 de rotaţie a acestuia în jurul Soarelui, să se găsească:

a) o expresie aproximativă (până la ordinul I în α) pentru rata de precesie a orbitei Pământului;

b) sensul precesiei comparativ cu sensul de rotaţie a Pământului în jurul Soarelui.

⋆1.5.23 O particulă cu masa m se află într-un câmp de forţe centrale având energia potenţială $E_p = kr$ şi se mişcă pe un cerc de rază r_0 în jurul centrului de forţe. Dacă se perturbă uşor particula pe direcţie radială, să se afle pulsaţia micilor oscilaţii ale acesteia.

BCU IASI - CENTRALA UNIVERSITARA LIBRARY

1.5.24 Dacă planul de oscilaţie al unui pendul matematic cu lungimea l este rotit în jurul axei verticale ce trece prin punctul de suspensie cu viteza unghiulară ω, se cer:

a) să se deducă ecuaţia de mişcare a pendulului;

b) să se rezolve ecuaţia de mişcare în aproximaţia unghiurilor mici.

1.5.25 Un corp punctiform cu masa m se poate mişca fără frecare pe un cerc vertical cu raza R. Cercul se roteşte în jurul diametrului său vertical cu viteza unghiulară constantă ω_0. Se cer:

a) să se găsească poziţiile de echilibru ale corpului şi să se studieze stabilitatea acestora;

b) să se calculeze pulsaţia micilor oscilaţii ale corpului în jurul stărilor de echilibru.

1.5.26 O tijă dreaptă, omogenă, cu masa m şi lungimea l se poate mişca fără frecare pe un cerc vertical cu raza R, astfel încât capetele sale să se afle tot timpul pe cerc. Să se determine poziţia de echilibru stabil al tijei pe cerc şi să se calculeze pulsaţia micilor oscilaţii ale acesteia în jurul poziţiei de echilibru.

1.6 Compunerea oscilaţiilor

1.6.1 Compunerea oscilaţiilor paralele

1.6.1.1 Să se compună următoarele oscilaţii paralele cu ajutorul metodei diagramelor fazoriale:

a) $x_1(t) = 3\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$ şi $x_2(t) = 6\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$;

b) $x_1(t) = 3\cos 15\pi t$ şi $x_2(t) = 6\cos\left(15\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ şi $x_3(t) = 8\sin\left(15\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$.

1.6.1.2 Să se compună următoarele oscilaţii paralele:

a) $x_1(t) = 3\cos\omega t$ şi $x_2(t) = 7\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$;

b) $x_1(t) = A\cos 10\pi t$ şi $x_2(t) = A\cos 12\pi t$.

Determinaţi perioada oscilaţiilor rezultante, precum şi perioada bătăilor care apar prin suprapunerea oscilaţiilor date.

1.6.1.3 Un punct material efectuează simultan două mişcări oscilatorii descrise de ecuaţiile $x_1(t) = 4\cos 20\pi t$, respectiv $x_2(t) = 5\cos 21\pi t$. Să se determine valorile extreme ale amplitudinii mişcării rezultante, precum şi perioada bătăilor.

BCU "Alexandru Ioan Cuza" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.6.1.4 Se compun două oscilaţii paralele. Dacă frecvenţa primei mişcări oscilatorii este 10 Hz sau 20 Hz, atunci frecvenţa bătăilor este ν. Pentru ce frecvenţe ale primei mişcări oscilatorii frecvenţa bătăilor este 3ν?

1.6.1.5 Oscilaţia rezultată prin compunerea a două oscilaţii armonice paralele, cu aceeaşi amplitudine este dată de ecuaţia $x(t) = A\cos 2t \cdot \cos 50t$, unde t se măsoară în secunde. Să se determine:

a) amplitudinea oscilaţiilor componente;

b) pulsaţiile oscilaţiilor componente;

c) perioada bătăilor cc rezultă prin compunerea celor două oscilaţii.

1.6.1.6 Să se compună n oscilaţii paralele cu aceeaşi amplitudine A şi pulsaţie ω, dacă fazele lor iniţiale cresc în progresie aritmetică cu raţia φ, faza iniţială a primei oscilaţii fiind α.

1.6.1.7 Să se compună un număr foarte mare de oscilaţii paralele cu aceeaşi pulsaţie ω, a căror amplitudine scade în progresie geometrică cu raţia q, iar faza iniţială creşte în progresie aritmetică cu raţia φ. Amplitudinea primei oscilaţii este A, iar faza sa iniţială α.

1.6.2 Compunerea oscilaţiilor perpendiculare

1.6.2.1 Se consideră următoarele oscilaţii perpendiculare:

a) $x(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{2}\right)$ şi $y(t) = 2\cos\frac{\pi}{6}t$;

b) $x(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right)$ şi $y(t) = 2\cos\frac{\pi}{4}t$.

Să se găsească şi să se deseneze ecuaţia traiectoriei particulei care este supusă simultan acestor oscilaţii.

1.6.2.2 Ecuaţia traiectoriei unui corp este $4x^2 + 9y^2 - 6xy = 27$ (cm^2). Să se determine:

a) amplitudinile de oscilaţie ale proiecţiilor corpului pe axele 0x, respectiv 0y;

b) defazajul dintre oscliaţiile de la punctul (a).

⋆1.6.2.3 Un resort elastic ideal cu constanta elastică k şi lungimea în stare nedeformată $2a$, se alungeşte şi i se fixează capetele de-a lungul axei $0x$ stfel încât mijlocul lui să fie în originea sistemului de axe $x0y$. De mijlocul resortului alungit se fixează un corp cu masa m. Corpul este scos din starea de echilibru fiind deplasat în punctul de coordonate (c, c), unde $c \ll a$ şi apoi eliberat din repaus. Dacă lungimea resortului alungit este $2b$, se cer:

a) să se arate că ecuaţiile parametrice ale mişcării corpului sunt $x = c\cos\omega_1 t$ şi $y = c\cos\omega_2 t$, unde $\omega_2^2/\omega_1^2 = 1 - (a/b)$.

b) să se deducă şi să se reprezinte grafic ecuaţia traiectoriei corpului pentru $b = 9a/8$.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

⋆1.6.2.4 Ecuaţiile parametrice de mişcare ale unui corp cu masa m sunt $x(t) = A\cos\omega t$ şi $y(t) = B\sin\omega t$. Să se afle momentul cinetic şi energia totală a corpului.

⋆1.6.2.5 Poziţia unei particule în sistemul de coordonate cartezian $x0y$ este (1,1) [m]. Să se determine poziţia particulei dacă axele se rotesc în sens trigonometric (spre stânga) cu 30^0.

⋆1.6.2.6 Să se arate că semiaxa mare a elipsei rezultate prin compunerea a două oscilaţii perpendiculare cu acceaşi pulsaţie, defazaj $\Delta\varphi$ şi amplitudini A, respectiv B, este înclinată faţă de axa $0x$ cu unghiul θ dat de relaţia:

$$tg2\theta = \frac{2AB}{A^2 - B^2}\cos\Delta\varphi$$

1.6.2.7 Un corp punctiform cu masa m este supus simultan oscilaţiilor $x(t) = A\cos\omega t$ şi $y(t) = A\sin\omega t$.

a) Să se determine ecuaţia traiectoriei şi energia cinetică a corpului.

b) Prin ce se deosebeşte mişcarea punctului material faţă de cazul anterior dacă $y(t) = -A\sin\omega t$?

1.6.2.8 Să se reprezinte grafic ecuaţia traiectoriei unui punct material care oscilează simultan după două direcţii perpendiculare astfel:

a) $x(t) = A\cos\omega t$ şi $y(t) = A\sin\omega t$;

b) $x(t) = A\sin\omega t$ şi $y(t) = A\cos\omega t$.

⋆1.6.2.9 Să se găsească amplitudinea oscilaţiei rezultate prin compunerea a două oscilaţii circulare, cu aceeaşi amplitudine şi frecvenţă, una dextrogiră şi una levogiră.

1.7 Analiza Fourier

1.7.1 Să se descompună oscilaţia compusă $x(t) = 20\sin^2 2\pi t\cos 4\pi t$ în oscilaţii armonice simple şi să se deseneze spectrul oscilaţiei compuse.

⋆1.7.2 Dacă $\omega = 2\pi/T$ şi m şi n sunt numere înregi, să se arate că următoarele funcţii sunt ortogonale pe intervalul $[0, T]$:

a) $\cos m\omega t$ şi $\cos n\omega t$, dacă $m \neq n$;

b) $\sin m\omega t$ şi $\sin n\omega t$, dacă $m \neq n$;

c) $\sin m\omega t$ şi $\cos n\omega t$, $(\forall)\, m, n \in [0, T]$.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

⋆1.7.3 Teorema lui Fourier spune că orice funcţie periodică se poate descompune într-o serie trigonometrică de forma

$$f(t) = A + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

Să se determine formulele de calcul al coeficienţilor Fourier A, a_n şi b_n.

⋆1.7.4 Dacă intervalul de periodicitate al funcţiei $f(t)$ este simetric faţă de origine, să se demonstreze că:

a) dacă funcţia f este pară atunci dezvoltarea în serie Fourier conţine numai termeni în cosinus;

b) dacă funcţia f este impară atunci dezvoltarea în serie Fourier conţine numai termeni în sinus.

1.7.5 Să se deducă dezvoltarea în serie Fourier pentru următoarele funcţii al căror domeniu de periodicitate este intervalul $[0, L]$:

a) $y(x) = Ax(L - x)$

b) $y(x) = A \sin \frac{\pi x}{L}$

c) $y(x) = \begin{cases} A \sin \dfrac{2\pi x}{L} & , x \in [0, L/2] \\ 0 & , x \in (L/2\ ,\ L] \end{cases}$

⋆1.7.6 Să se deducă dezvoltarea în serie Fourier pentru următoarele funcţii şi să se redefinească funcţia $f(t)$ astfel încât seria Fourier găsită să conveargă către f pentru toate punctele intervalului de periodicitate:

a) $f(t) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & , t \in \left[-\dfrac{T}{2}, 0\right) \\ \dfrac{\pi}{2} & , t \in \left(0, \dfrac{T}{2}\right] \end{cases}$

b) $f(t) = \alpha\omega t$, $t \in \left[-\dfrac{T}{2}, \dfrac{T}{2}\right]$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, iar α este o constantă pozitivă.

c) $f(t) = \begin{cases} \dfrac{A}{2\pi} t & , t \in (nT, (n+1)T) \\ 0 & , t \in \{nT | n \in \mathbb{N}\} \end{cases}$

⋆1.7.7 Fie funcţia reală $f(x) = x$ pentru $x \in (0, 2)$. Să se dezvolte această funcţie în serie Fourier care să conţină termeni numai în sinus sau numai în cosinus.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.8 Oscilaţii amortizate

1.8.1 Un corp cu masa $m = 0,5$ kg este legat de un perete vertical printr-un resort cu constanta elastică $k = 245$ N/m şi masa neglijabilă. Corpul se poate mişca pe un plan orizontal, coeficientul de frecare dintre corp şi plan fiind $\mu = 0,1$. Dacă iniţial alungirea resortului este $A_0 = 3$ cm, iar corpul este în repaus, să se determine:

a) perioada proprie de oscilaţie a corpului;

b) pseudoperioada oscilaţiilor corpului;

c) forţa elastică din resort după oprirea corpului;

d) numărul de oscilaţii complete efectuate de corp până la oprire.

Acceleraţia gravitaţională este $g = 9,8$ N/kg.

1.8.2 Acul indicator al unui instrument de măsură are momenul de inerţie $I = 4 \cdot 10^{-6}$ kg·m^2 în raport cu axa de rotaţie. Momentul de revenire a acului în poziţia de echilibru $\varphi = 0$ este produs de un arc spiralat cu constanta elastică $K = 0,25$ N·cm·grd^{-1}. Datorită frecării, în articulaţie apare un moment rezistent constant $M_f = 5 \cdot 10^{-3}$ N·cm.

a) Să se determine perioada oscilaţiilor libere ale arcului.

b) Dacă acul este deviat din poziţia de echilibru, unde arcul spiralat nu este deformat, cu unghiul $\varphi_{max} = 30^0$ şi apoi lăsat liber, după câte semicicluri se va opri acesta?

⋆1.8.3 O particulă cu masa m se mişcă în câmpul forţelor elastice $\vec{F} = -k\vec{x}$, întâmpinând din partea mediului o forţă de rezistenţă vâscoasă $\vec{R} = -2m\delta\vec{x}$, δ fiind coeficientul de amortizare. În ce condiţii legea mişcării corpului arată ca în Fig. 1.8.3?

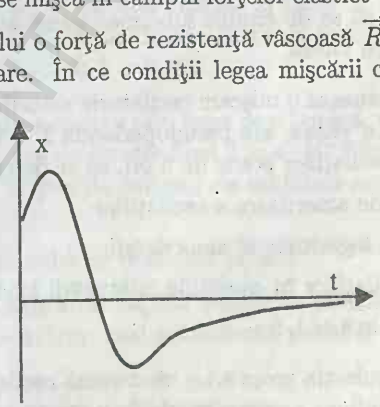


Fig. 1.8.3

⋆1.8.4 Să se deducă şi să se reprezinte grafic ecuaţia de mişcare a unui corp care efectuează o mişcare oscilatorie amortizată ctitic, coeficientul de amortizare fiind δ. Forţa de rezistenţă este de tip vâscos.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.8.5 O particulă cu masa m se mişcă sub acţiunea unei forţe elastice $\vec{F} = -k\vec{x}$ şi a uneia de frecare vâscoasă $\vec{F}_r = -b\vec{v}$. Să se determine coeficientul de rezistenţă b astfel încât apropierea de echilibru să se facă cel mai rapid.

1.8.6 De câte ori trebuie să crească coeficientul de amortizare pentru ca oscilaţiile pseudoperiodice cu decrementul logaritmic D să treacă în mişcarea amortizată critică? Forţa de rezistenţă este proporţională cu viteza.

1.8.7 Un corp cu masa $m = 0,4$ kg este suspendat de un resort cu constanta elastică $k = 200$ N/m. Dacă pseudopulsaţia este mai mică cu 0,005 s^{-1}decât pulsaţia proprie a pendulului, să se determine coeficientul de rezistenţă al forţei care produce amortizarea. Forţa de rezistenţă este proporţională cu viteza.

1.8.8 Un corp oscilează armonic cu frecvenţa proprie de 1 Hz. Să se determine pseudopulsaţia oscilaţiilor amortizate dacă amplitudinea acestora scade de la 25 cm la 12,5 cm după 10 s de la începerea mişcării. Forţa de rezistenţă este proporţională cu viteza. Se cunoaşte că $\ln 2 \simeq 0,693$.

1.8.9 O particulă se depărtează cu $l = 1$ cm de poziţia de echilibru şi se eliberează din repaus. Ştiind că oscilaţiile particulei sunt amortizate, decrementul logaritmic fiind $D = 0,02$, să se afle spaţiul parcurs de particulă până la oprirea definitivă. Forţa de rezistenţă este proporţională cu viteza.

1.8.10 Să se determine factorul de calitate al unui pendul matematic cu lungimea $l = 50$ cm dacă în timpul $\Delta t = 5,2$ min energia sa totală a scăzut de $n = 40000$ ori. Forţa de rezistenţă este proporţională cu viteza.

1.8.11 Un pendul matematic oscilează amortizat, decrementul logaritmic fiind $D = 0,1$. Ştiind că după un timp $\Delta t = 6,28$ s energia pendulului a scăzut de $n = e^2$ ori, să se determine lungimea pendulului. Forţa de rezistenţă este proporţională cu viteza.

1.8.12 Un corp ce efectuează o mişcare oscilatorie amortizată, forţa de rezistenţă fiind proporţională cu viteza, are pseudoperioada $T = 0,25$ s. Dacă în primele 10 s amplitudinea oscilaţiilor scade de 5 ori, să se determine:

a) coeficientul de amortizare a oscilaţiilor;

b) decrementul logaritmic al amortizării;

c) perioada oscilaţiilor în condiţiile înlăturării amortizării.

Se cunoaşte că $\ln 5 \simeq 1,6$.

1.8.13 Un pendul cu pulsaţia proprie ω_0 efectuează oscilaţii amortizate şi că după N_0 oscilaţii amplitudinea acestora scade de e ori, să se determine:

a) decrementul logaritmic al amortizării;

b) pseudoperioada oscilaţiilor;

c) coeficientul de amortizare a oscilaţiilor.

Forţa de rezistenţă este proporţională cu viteza.

BCU IAŞI CENTRALA UNIVERSITARĂ LIBRARY

1.8.14 Un corp cu masa $m = 0,25$ kg, suspendat de un resort ideal, efectuează oscilaţii amortizate, forţa de frânare fiind proporţională cu viteza corpului. Dacă elongaţia maximă a resortului scade la un sfert după $N_1 = 10$ oscilaţii complete, efectuate în timpul $\Delta t = 8,4$ s, să se determine:

a) coeficientul de amortizare a oscilaţiilor;

b) decrementul logaritmic al amortizării;

c) constanta elastică a resortului.

1.8.15 Într-un cilindru orizontal închis la ambele capete, cu lungimea $2l$ şi secţiunea S se află un piston cu masa m şi grosimea neglijabilă. În cele două compartimente astfel formate se află cantităţi egale din acelaşi gaz ideal, la presiunea p_0. Printr-o metodă oarecare se scoate pistonul din poziţia de echilibru. Ştiind că temperatura gazului rămâne constantă, iar între piston şi cilindru forţa de frecare este $F_r = \alpha v$, unde v este viteza pistonului, iar α o constantă, să se afle:

a) condiţia pe care trebuie să o îndeplinească constanta α pentru ca pistonul să efectueze mici oscilaţii în jurul poziţiei de echilibru;

b) coeficientul de amortizare şi timpul de relaxare a oscilaţiilor;

c) decrementul logaritmic şi perioada oscilaţiilor;

d) numărul de oscilaţii efectuate de piston în timpul de relaxare;

e) factorul de calitate al acestui oscilator.

1.8.16 De capătul liber al unui resort cu constanta elastică $k = 100$ N/m, suspendat vertical, este legat un corp cu masa $m = 1$ kg. Ştiind că după 20 de oscilaţii amplitudinea acestora a devenit un sfert din valoarea iniţială $A_0 = 10$ cm, să se determine cantitatea medie de căldură radiată în timp de o secundă de resort dacă temperatura acestuia nu se modifică. Forţa de rezistenţă este proporţională cu viteza. Se cunoaşte că $\ln 2 \simeq 0,693$.

1.8.17 Acul indicator al unui galvanometru este legat de o bobină, momentul de inerţie al acestui sistem faţă de axa de rotaţie fiind $I = 4 \cdot 10^{-4}$ kg·m^2. Arcul spiralat de readucere a bobinei în poziţia iniţială de echilibru are constanta elastică $K = 10^{-6}$ Nm/rad.

a) pulsaţia proprie a sistemului ac indicator-bobină;

b) coeficientul de amortizare a oscilaţiilor pentru ca pseudopulsaţia oscilaţiilor amortizate să fie de $n = 1,1$ ori mai mică decât pulsaţia proprie calculată la punctul (a).

Forţa de rezistenţă este proporţională cu viteza.

⋆1.8.18 Un resort elastic cu masa $m = 50$ g se alungeşte sub acţiunea propriei sale greutăţi cu $\Delta l = 2$ cm. Dacă timpul de relaxare al oscilaţiilor este $\tau = 5$ s, iar toate spirele resortului oscilează în fază, să se determine:

a) constanta elastică a resortului;

BCU TIMIŞOARA UNIVERSITY LIBRARY

b) perioada proprie de oscilaţie;

c) pseudoperioada;

d) factorul de calitate al acestui oscilator;

e) Decrementul logaritmic al amortizării.

Forţa de rezistenţă este proporţională cu viteza.

1.9 Oscilaţii forţate

⋆1.9.1 Pentru a menţine deschisă o uşă batantă, asupra acesteia trebuie să se acţioneze cu o forţă de 50 N. Neglijând frecarea în balamale, este oare posibilă deschiderea acestei uşi prin aplicarea unei forţe de 1 N?

1.9.2 Frecvenţa de rezonanţă a unui difuzor cu aria secţiunii transversale $S = 314$ cm^2 şi masa $m = 20$ g este $\nu_0 = 60$ Hz. Care va fi frecvenţa de rezonanţă a difuzorului dacă acesta închide o cutie cu volumul $V = 19531,25$ cm^3, iar temperatura aerului în cutie este constantă în timpul vibraţiilor difuzorului.

1.9.3 Să se scrie ecuaţia de mişcare a unui corp cu masa m, suspendat de un resort ideal cu constanta elastică k, dacă asupra lui acţionează o forţă verticală constantă F. La momentul iniţial corpul de află în echilibru.

1.9.4 Un corp cu masa m este suspendat în repaus de un resort ideal cu constanta elastică k. Începând cu momentul $t = 0$ asupra corpului acţionează un timp τ o forţă constantă F. Să se scrie ecuaţia de mişcare a corpului după încetarea acţiunii forţei externe.

1.9.5 Un corp este suspendat de un resort ideal de tavanul unui lift, pulsaţia proprie a oscilaţiilor corpului fiind ω_0. Corpul este iniţial în echilibru, iar liftul începe să urce cu acceleraţia $a = \alpha t$, unde α este o constantă pozitivă. Să se scrie legea de mişcare a corpului în timpul urcării accelerate a liftului.

1.9.6 Un corp cu masa m se poate mişca fără frecare pe un plan orizontal. Corpul este legat de un perete vertical cu ajutorul unui resort ideal cu constanta elastică k. La momentul iniţial, când corpul se află în echilibru, asupra sa începe să acţioneze o forţă $F \sin \frac{\pi}{\tau} t$ care duce la alungirea resortului şi care acţionează un timp τ. Să se determine:

a) legea de mişcare a corpului după încetarea acţiunii forţei externe;

b) momentul de timp la care amplitudinea oscilaţiilor este maximă, precum şi valoarea acestei aplitudini.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.9.7 Un corp cu masa m este suspendat de un resort ideal cu constanta elastică k. Punctul de suspensie al resortului este forţat să oscileze vertical cu amplitudinea A şi pulsaţia ω. Să se determine amplitudinea oscilaţiilor forţate, precum şi diferenţa dintre faza forţei externe şi cea a oscilaţiilor forţate ale corpului.

1.9.8 O remorcă cu două roţi şi masa $m = 450$ kg este trasă cu viteză constantă pe un drum al cărui profil este o cosinusoidă cu amplitudinea de 50 mm şi perioada de 4 m. Remorca este prinsă de fiecare roată cu câte un resort ideal vertical cu constanta elastică $k = 800$ N/m. Neglijând masa roţilor, să se determine:

a) viteza remorcii pentru care vibraţiile acesteia cauzate de forma drumului să aibă amplitudine maximă;

b) amplitudinea vibraţiilor dacă viteza remorcii este $v = 15$ km/h.

1.9.9 Un resort elastic orizontal cu constanta elastică k, lungimea iniţială x_0 şi pulsaţia proprie ω_0 are un capăt legat de un ax vertical şi celălalt de un corp cu masa m. Sistemul se roteşte cu viteza uncghiulară constantă ω, resortul rămânând permanent orizontal.

a) Să se determine poziţia de echilibru x a corpului, măsurată faţă de ax.

b) Ce se întâmplă în cazul în care $\omega = \omega_0$?

1.9.10 Un instrument de măsură cu greutatea $G = 40$ N este suspendat de tavanul unei hale industriale prin intermediul unui resort ideal. Datorită funcţionării unor maşini tavanul vibrează armonic cu frecvanţa $\nu = 50$ Hz. Să se determine:

a) constanta elastică a resortului astfel încât amplitudinea oscilaţiilor forţate ale instrumentului să fie de $n = 19$ ori mai mică decât amplitudinea vibraţiilor tavanului;

b) accelaraţia maximă şi forţa maximă transmisă instrumentului dacă amplitudinea vibraţiilor tavanului este $A_0 = 0,57$ mm.

Se va considera că $g \simeq \pi^2 \simeq 10$ (m/s^2).

1.9.11 Planşeul unei încăperi vibrează din cauza excentricităţii unui volant ce se roteşte cu turaţia de 600 rot/s. Volantul intră în componenţa unui strung cu masa $M = 200$ kg. Pentru a reduce vibraţiile planşeului, sub strung trebuie aşezat un covor de cauciuc. Dacă modulul de elasticitate al cauciucului este $E = 3,15 \cdot 10^8$ N/m^2, iar aria bazei strungului este $S = 2$ m^2, să se determine grosimea necesară a covorului de cauciuc, astfel încât vibraţiile planşeului să nu se amplifice. Se va considera că grosimea covorului de cauciuc este direct proporţională cu masa sa.

⋆1.9.12 Să se determine amplitudinea oscilaţiilor forţate cu amortizare vâscoasă şi defazajul dintre oscilaţii şi forţa externă periodică utilizând numerele complexe.

⋆1.9.13 Să se demonstreze că rezonanţa amplitudinilor nu se poate produce pentru orice valoare a coeficientului de amortizare, pe când rezonanţa vitezelor da. Asupra oscilatorului acţionează o forţă externă periodică şi una de rezistenţă vâscoasă.

BCU IASI - FIZICA - UNIVERSITY LIBRARY

⋆1.9.14 Asupra unui oscilator acţionează o forţă externă periodică şi o forţă de rezistenţă vâscoasă. Pentru amortizări slabe se cer:

a) să se analizeze rezonanţa energiilor;

b) să se demonstreze că produsul dintre semilărgimea curbei de rezonanţă şi amplitudinea ei depinde doar de amplitudinea excitaţiei externe şi de masa oscilatorului şi nu depinde de factorul de calitate.

⋆1.9.15 Să se demonstreze că un oscilator forţat cu amortizare vâscoasă se comportă la rezonanţă ca un oscilator armonic ideal.

⋆1.9.16 Să se construiască o analogie între un oscilator forţat cu amortizare vâscoasă şi un circuit de curent alternativ RLC serie.

1.9.17 Asupra unui corp cu masa $m = 2$ kg, legat de un resort ideal şi de un amortizor, acţionează o forţă externă $F = 3,2 \sin \Omega t$ (N). Dacă rezonanţa amplitudinilor se produce la frecvenţa $\nu_r = 4,8$ Hz, amplitudinea la rezonanţă fiind $A_r = 2,3$ cm, să se determine:

a) constanta elastică a resortului;

b) coeficientul de amortizare a oscilaţiilor;

c) amplitudinea oscilaţiilor forţate la o frecvenţă a forţei externe $\nu = 4$ Hz;

d) amplitudinea oscilaţiilor forţate la o frecvenţă a forţei externe $\nu = 4$ Hz în condiţiile înlăturării amortizorului.

1.9.18 Să se calculeze raportul dintre amplitudinea maximă de oscilaţie a unui sistem oscilator forţat şi amplitudinea statică ştiind valoarea decrementului logaritmic $D = 2$. Amortizarea oscilaţiilor este de tip vâscos.

1.9.19 Un corp cu masa $m = 2.025$ kg este suspendat de un resort ideal. La echilibru alungirea resortului este $y_0 = 2,5$ cm. Capătul superior al resortului este supus unei mişcări oscilatorii armonice cu amplitudinea $A = 1$ mm. Factorul de calitate al oscilatorului este $Q = 15$. Să se determine:

a) pulsaţia proprie a oscilatorului;

b) amplitudinea oscilaţiilor forţate când pulsaţia proprie a oscilatorului este egală cu pulsaţia forţei externe.

1.9.20 Amplitudinea oscilaţiilor armonice forţate ale unui sistem este aceeaşi dacă pulsaţia forţei externe este $\Omega_1 = 400$ s^{-1}, respectiv $\Omega_2 = 600$ s^{-1}. Ştiind că pentru aceste două pulsaţii energia oscilatorului este jumătate din valoarea maximă, să se determine:

a) pulsaţia forţei externe pentru care amplitudinea oscilaţiilor este maximă;

b) coeficientul de amortizare a oscilaţiilor;

c) decrementul logaritmic al amortizării oscilaţiilor;

d) factorul de calitate al oscilatorului.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.9.21 Oscilaţiile amortizate ale unui sistem mecanic au pulsaţia ω. Acest sistem, forţat după legea $F(t) = F_0 \cos \Omega t$, are semilărgimea curbei de rezonanţă egală cu $\frac{\omega}{5}$. Să se determine:

a) pulsaţia forţei externe pentru care puterea absorbită de oscilator este maximă;

b) factorul de calitate al oscilatorului.

1.9.22 Pentru pulsaţiile forţei externe $\Omega_1 = 300\ s^{-1}$, respectiv $\Omega_2 = 900\ s^{-1}$ amplitudinea vitezei unei particule este jumătate din valoarea maximă. Să se determine:

a) pulsaţia forţei externe corespunzătoare rezonanţei vitezelor;

b) coeficientul de amortizare a oscilaţiilor;

c) decrementul logaritmic al amortizării oscilaţiilor;

d) factorul de calitate al oscilatorului.

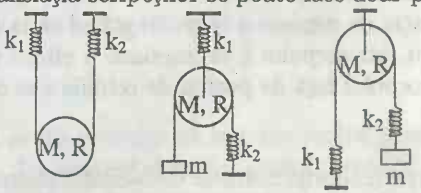
1.9.23 Un oscilator cu masa $m = 1$ kg are perioada proprie de oscilaţie $T_0 = 2$ s. Dacă asupra lui acţionează o forţă de frecare vâscoasă şi o forţă cosinusoidală cu amplitudinea $F_0 = 0,1$ N, iar la rezonanţa vitezelor amplitudinea oscilaţiilor este $A_0 = 5$ cm, să se determine:

a) pulsaţia forţei externe pentru a se realiza rezonanţa amplitudinilor;

b) amplitudinea oscilaţiilor la rezonanţa amplitudinilor.

1.10 Oscilaţii cu mai multe grade de libertate

1.10.1 Să se determine pulsaţiile proprii ale modurilor normale de oscilaţie pentru sistemele din Fig. 1.10.1. Scripeţii sunt discuri omogene, firele sunt inxtensibile, au masa neglijabilă şi nu alunecă pe scripeţi, iar resorturile sunt ideale. În primele două cazuri translaţia scripeţilor se poate face doar pe verticală.



(a) (b) (c)

Fig. 1.10.1

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.10.2 Două corpuri cu masele m_1, respectiv m_2, legate între ele printr-un resort ideal cu constanta elastică k, se pot mişca fără frecare pe o masă orizontală. Să se determine modurile normale de oscilaţie ale sistemului.

1.10.3 Două pendule matematice identice, cu masele corpurilor egle cu m şi lungimea tijelor l, sunt suspendate paralel. Pendulele se leagă între ele cu un resort ideal cu constanta elastică k astfel încât la echilibru acesta este nedeformat. Resortul este orizontal şi este prins de tije la distanţa a de punctele de suspensie ale pendulelor. Se cer:

a) modurile normale de oscilaţie ale acestor oscilatori cuplaţi;

b pulsaţia bătăilor, dacă iniţial un pendul este în echilibru, iar celălalt se eliberează din repaus din poziţia unghiulară $\theta_{10} = \theta_0$.

1.10.4 Să se determine pulsaţiile modurilor normale de oscilaţie ale pendulului dublu din Fig. 1.10.4. Masele tijelor sunt neglijabile. Să se analizeze cazurile particulare (a) $m_2 \ll m_1$ şi (b) $m_2 = m_1$ şi $l_2 = l_1$.

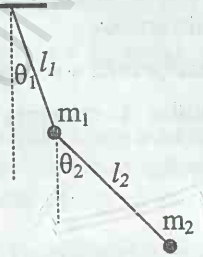


Fig. 1.10.4

1.10.5 Un resort ideal cu constanta elastică k şi lungimea în strea nedeformată l este suspendat vertical. La capătul liber al resortului se fixează un corp cu masa m. Presupunând că mişcarea sistemului se face exclusiv în plan vertical, să se găsească ecuaţia de mişcare a corpului ştiind că la $t = 0$ sistemul este vertical şi în echilibru, iar corpului i se imprimă o viteză v_0 orientată pe orizontală. Deplasările corpului faţă de poziţia de echilibru se consideră mici.

1.10.6 Să se determine modurile normale de oscilaţie pentru sistemele din Fig. 1.10.6. Resorturile sunt ideale, iar oscilaţiile sunt excusiv longitudinale.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

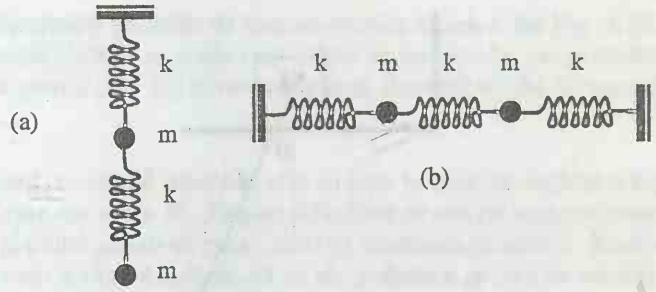


Fig. 1.10.6

1.10.7 O placă metalică pătrată cu masa m şi latura L este suspendată vertical la capete de două resorturi identice cu constanta k. Placa se poate mişca doar în plan vertical. Să se calculeze pulsaţiile proprii de oscilaţie ale plăcii considerând oscilaţiile de mică amplitudine.

1.10.8 Să se determine pulsaţiile modurilor normale corespunzătoare micilor oscilaţii ale sistemului din Fig. 1.10.8 ştiind că tija are masa neglijabilă şi că este fixată de corp printr-o articulaţie mobilă. Se neglijează frecările. Să se particularizeze rezultatele pentru cazul $m \ll M$.

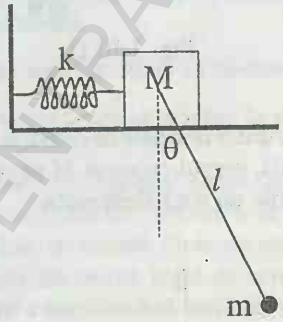


Fig. 1.10.8

1.10.9 Neglijând frecările, să se afle ecuaţiile de mişcare pentru pendulul eliptic reprezentat în Fig. 1.10.9. La momentul iniţial sistemul este în repaus, corpul cu masa M se află la distanţa x_0 de peretele vertical, iar pendulul este deviat cu unghiul θ_0 faţă de verticală. Să se justifice denumirea acestui pendul.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

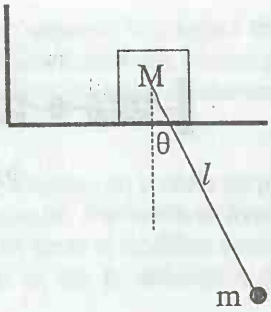


Fig. 1.10.9

⋆1.10.10 Un resort elastic real cu constanta elastică k şi masa m este suspendat vertical. De capătul liber al resortului se suspendă un pendul matematic cu lungimea l şi masa M. Să se afle ecuaţiile de mişcare ale sistemului dacă la momentul iniţial sistemul este în echilibru, iar pendulului i se imprimă o viteză orizontală v_0. Resortul se poate mişca doar pe verticală.

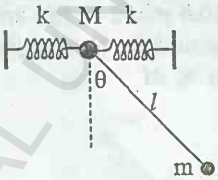


Fig. 1.10.11

1.10.11 Să se afle pulsaţiile modurilor normale de oscilaţie ale sistemului din Fig. 1.10.11. Tija are masa neglijabilă, corpul cu masa M se poate mişca doar pe orizontală, iar la echilibru resorturile nu sunt deformate.

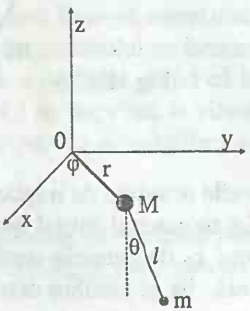


Fig. 1.10.12

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.10.12 Să se determine ecuaţiile de mişcare pentru sistemul din Fig. 1.10.12. Tija are masa neglijabilă şi se poate mişca doar în planul $x0y$, iar pendulul matematic doar în planul $y0z$. La momentul iniţial sistemul se afla în repaus, $\varphi = 0$, iar $\theta = \theta_0$.

1.10.13 Pe o masă orizontală netedă se află un plan înclinat cu unghiul α faţă de orizontală şi care are masa M. Pe planul înclinat se află un corp cu masa m, legat de vârful planului printr-un resort ideal cu constanta elastică k. Neglijând frecările dintre corp şi planul înclinat, să se afle pulsaţiile proprii de oscilaţie ale acestui sistem.

1.10.14 Un fir inextensibil cu masa nelijabilă şi lungimea $3l$ este fixat orizontal la capete. La distanţele l, respectiv $2l$ de unul dintre capetele firului sunt fixate două corpuri identice, fiecare cu masa m. Dacă tensiunea din fir este T, să se determine pulsaţiile modurilor normale ale micilor oscilaţii transversale ale sistemului.

1.10.15 O bară omogenă cu lungimea l şi masa M este suspendată vertical, putând efectua mici oscilaţii în jurul axei orizontale de suspensie. Capătul inferior al barei este legat de un corp cu masa m printr-un resort ideal, orizontal, cu constanta elastică k. Corpul se poate mişca fără frecare pe planul orizontal. Să se determine pulsaţiile modurilor normale de oscilaţie ale acestui sistem.

1.10.16 Două corpuri cu masele m_1, respectiv m_2, legate între ele printr-un resort ideal cu constanta elastică k, se află în repaus pe o masă plană, netedă şi orizontală. La momentul $t = 0$ asupra primului corp începe să acţioneze o forţă orizontală $F = F_0 \cos \Omega t$. Să se determine:

a) pulsaţia forţei externe astfel încât să se realizeze rezonanţa;

b) ecuaţiile de mişcare ale celor două corpuri la rezonanţă.

1.10.17 Asupra unui corp cu masa M, suspendat de un resort ideal cu constanta elastică k, acţionează o forţă $F = F_0 \cos \Omega t$. Pentru a se evita rezonanţa sistemul este prevăzut cu un amortizor ce constă dintr-un corp cu masa m suspendat de corpul cu masa M printr-un resort ideal cu constanta elastică k_1. Ştiind că valoarea maximă admisă a amplitudinii oscilaţiilor amortizorului este A_0, să se determine m şi k_1 astfel încât amplitudinea oscilaţiilor corpului cu masa M să fie minimă.

1.10.18 Pe un plan orizontal neted se află trei corpuri cu masele m_1, m_2, respectiv m_3, legate prin două resorturi ideale cu constantele elastice k_1, respectiv k_2. Să se determine pulsaţiile modurilor normale de oscilaţie ale acestui sistem.

1.10.19 Să se determine pulsaţiile modurilor normale longitudinale pentru sistemul din Fig. 1.10.19. Masele corpurilor şi constantele elastice ale resorturilor se consideră cunoscute.

BCU ASTI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

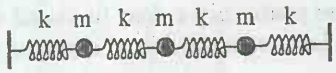


Fig. 1.10.19

1.10.20 Un tub cilindric cu masa M poate aluneca fără frecare pe o sârmă orizontală. De capetele cilindrului se suspendă două pendule matematice identice, fiecare cu masa m şi lungimea l. Pentru cazul oscilaţiilor pendulelor în planul vertical ce conţine sârma, să se determine pulsaţiile proprii ale modurilor normale de oscilaţie ale sistemului.

1.10.21 Trei corpuri, două cu masa m şi unul cu masa M se pot mişca fără frecare pe un cerc orizontal. Corpurile sunt legate între ele prin trei resorturi identice, fiecare având constanta elastică k, astfel încât, la orice moment, cele trei resorturi descriu împreună perimetrul cercului. Să se determine modurile normale de oscilaţie ale acestui sistem dacă iniţial resorturile sunt netensionate, iar sistemul în echilibru.

1.10.22 Să se determine frecvenţele oscilaţiilor longitudinale ale unui lanţ liniar infinit de lung de atomi identici. Se cunosc: masa fiecărui atom este m, constanta elastică a legăturilor dintre atomi este egală cu k, iar distanţa dintre poziţiile de echilibru dintre orice doi atomi vecini este a.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2 UNDE ELASTICE

2.1 Proprietăţi generale. Unde armonice

2.1.1 Balansând o barcă un om produce unde superficiale pe un lac liniştit. El observă că barca efectuează 12 oscilaţii în 20 s. Fiecare oscilaţie produce câte un val care ajunge în 5 s la malul aflat la 12 m de barcă. Calculaţi lungimea de undă a undelor superficiale.

2.1.2 Dintr-un punct de pe malul unui râu se aruncă perpendicular pe mal o piatră care cade în apă la distanţa L de mal. După cât timp unda superficială produsă în punctul de cădere a pietrei va ajunge în dreptul punctului de aruncare, dacă râul curge cu viteza v, iar unda se propagă cu viteza $c > v$.

2.1.3 O barcă cu motor orientată iniţial spre malul unui lac execută un viraj circular spre aval cu viteza $v = 18$ km/h. Valurile produse de barcă ajung la mal după $t = 2$ min de la începerea virajului, având viteza $c = 9$ km/h. Să se determine distanţa iniţială L dintre barcă şi mal ştiind că raza de curbură a virajului este $r = L/2$.

2.1.4 Pe o suprafaţă orizontală fără frecări se află o frânghie cu masa m şi lungimea l strânsă sub forma unei spirale aşezate vertical. De capătul liber al fânghiei se trage cu forţa constantă F astfel încât frânghia se derulează cu viteză constantă.

a) Care este viteza cu care se derulează frânghia?

b) În timpul derulării, frânghiei i se imprimă un impuls transversal. Ce viteză de propagare va avea perturbaţia faţă de suprafaţa orizontală în funcţie de sensul de deplasare al perturbaţiei?

2.1.5 Utilizând argumente dimensionale să se determine viteza unei unde transversale într-o coardă elastică cu masa unităţii de lungime μ. Tensiunea din coardă este T.

2.1.6 Forţa de revenire în cazul undelor superficiale este datorată gravitaţiei dacă apa este adâncă. Utilizând argumente dimensionale arătaţi că viteza undelor superficiale lungi este proporţională cu $\sqrt{g\lambda}$, unde g este acceleraţia gravitaţională, iar λ lungimea de undă.

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2.1.7 Utilizând argumente dimensionale arătaţi că viteza undelor superficiale scurte este proporţională cu $\sqrt{\frac{\sigma}{\rho\lambda}}$, unde σ este coeficientul de tensiune superficială, ρ densitatea apei, iar λ lungimea de undă.

⋆2.1.8 Deduceţi viteza de propagare c a undelor longitudinale într-o bară cilindrică cu densitatea ρ şi modulul de elasticitate E utilizând teorema variaţiei impulsului.

⋆2.1.9 Deduceţi viteza de propagare c a undelor transversale într-o coardă elastică cu masa unităţii de lungime μ şi tensiunea T utilizând teorema variaţiei impulsului.

⋆2.1.10 Propagarea unei unde transversale într-o coardă elastică cu masa unităţii lungime μ şi tensiunea T poate fi modelată astfel: în sistemul de referinţă legat de undă perturbaţia nu se propagă, ci coarda se deplasează cu viteza undei dar în sens opus acesteia. Presupunând forma perturbaţiei un arc de cerc şi deci că elementele coardei care o întâlnesc se mişcă pe acesta, să se deducă expresia vitezei de propagare a undei.

2.1.11 O undă armonică plană cu frecvenţa $\nu = 450$ Hz se propagă într-un mediu omogen cu viteza $c = 340$ m/s. Dacă amplitudinea de oscilaţie a particulelor mediului este $A = 0,3$ mm, să se afle:

a) lungimea de undă λ;

b) viteza maximă de oscilaţie a particulelor mediului.

2.1.12 Extremitatea unei coarde elastice semiinfinite oscilează după legea $\xi = 0,05\cos 20\pi t$ (m).

a) Aflaţi frecvenţa şi perioada oscilaţiilor extremităţii.

b) Calculaţi lungimea de undă a undelor elastice transversale care se propagă în coardă cu viteza $c = 0,5$ m/s.

c) Ce diferenţă de fază există între oscilaţiile punctelor de pe coardă aflate la distanţa $\Delta x = 5$ cm unul de altul?

d) La ce distanţă se află două puncte de pe coardă ale căror oscilaţii sunt defazate cu $\pi/6$ rad?

e) După cât timp va începe să oscileze un punct situat la distanţa $x = 30$ cm de extremitatea corzii?

2.1.13 Printr-un mediu cu modulul de elasticitate $E = 75G$ N/m^2 se propagă o undă longitudinală cu faza iniţială nulă. Ecuaţia oscilaţiilor particulelor mediului la distanţa $x = 5$ m de sursă este $\xi = 2\cos(500t - 0,5)$ [mm]. Să se determine:

a) Frecvenţa şi perioada undei.

b) Densitatea mediului.

c) Lungimea de undă a undei.

BCUAIC CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

d) Ecuaţia oscilaţiilor particulelor mediului la distanţa $x' = 1$ m de sursă şi diferenţa de de fază dintre aceste oscilaţii şi cele de la distanţa $x = 5$ m de sursă, pentru acelaşi moment de timp.

e) Densitatea medie de energie a mediului la distanţa x.

2.1.14 Amplitudinea unei perturbaţii este $A = 10$ cm, frecvenţa $\nu = 4$ Hz, iar viteza de propagare a perturbaţiei într-un mediu elastic este $c = 100$ m/s. Să se afle deplasarea faţă de poziţia de echilibru, viteza şi acceleraţia punctelor aflate la distanţa $x = 100$ m faţă de sursa de oscilaţii la momentul $t = 1$ s de la începerea mişcării.

2.1.15 Să se arate că panta unei corzi într-un punct oarecare este numeric egală cu raportul dintre viteza de oscilaţie a elementului de coardă din acel punct şi viteza undei.

2.1.16 O coardă cu masa m şi lungimea l este suspendată vertical de unul din capete.

a) Care este viteza undelor transversale în coardă la distanţa y de capătul liber?

b) Să se afle timpul τ în care perturbaţia transversală parcurge coarda?

2.1.17 În lungul unei coarde se propagă de la stânga la dreapta o undă transversală cu frecvenţa ν, viteza c şi cu amplitudinea A. Tensiunea din coardă este F. Să se determine lucrul mecanic efectuat într-o perioadă de către un punct de pe coardă asupra părţii de coardă din dreapta sa.

2.1.18 O undă armonică plană transversală se propagă printr-o coardă elastică având amplitudinea A_1. Unda se propagă printr-o regiune în care masa pe unitatea de lungime a corzii se modifică gradual de la μ_1 la μ_2. Presupunând că lungimea corzii în care are loc modificarea masei unităţii ei de lungime este mult mai mare decât lungimea de undă (astfel încât să se poată neglija fenomenele de reflexie şi refracţie), să se determine amplitudinea undei după regiunea de tranziţie.

2.1.19 Determinaţi vectorul de poziţie al unei surse punctiforme de unde sferice într-un sistem de coordonate în care două puncte coliniare cu sursa, situate de o parte şi de de cealaltă a sursei, au vectorii de poziţie $\vec{r}_1$ şi $\vec{r}_2$. În aceste puncte amplitudinile de oscilaţie sunt A_1 şi A_2.

2.1.20 O sursă punctiformă de unde sferice se află pe axa de simetrie a unei deschideri circulare cu raza $R = 0,5$ m făcută într-un perete plan, la distanţa $l = 1$ m de centrul deschiderii. Determinaţi fluxul mediu de energie al undei ce trece prin deschidere, dacă intensitatea undei în centrul deschiderii este $I_0 = 3 \cdot 10^{-5}$ W/m^2.

⋆2.1.21 Se ştie că direcţia de propagare a unei unde (raza) se curbează dacă există un gradient al vitezei de propagare al undei, aceasta tinzând să se întoarcă în regiunea din spaţiu unde viteza de propagare este mare. Concret, se ştie că viteza de propagare a undelor de maree este $c = \sqrt{gy}$, care, după cum se vede scade cu apropierea valurilor de mal, adică cu scăderea adâncimii y a apei.

BCU CLUJ / UNIVERSITY LIBRARY

Dacă direcţia valurilor era la un moment dat perpendiculară pe mal, în final toate valurile ajung la mal paralel cu acesta, tocmai din cauza curbării razelor (independent de direcţia vântului). Să se determine raza de curbură pentru acest tip de unde.

⋆2.1.22 Într-o bară omogenă cu densitatea ρ şi modulul de forfecare G se excită pe rând şi independent o perturbaţie de forfecare şi una de torsiune. Să se demonstreze că viteza undelor de forfecare este egală cu viteza undelor de torsiune.

⋆2.1.23 Să se găsească viteza mareelor, care sunt unde superficiale foarte lungi (lungimea de undă a acestora $\lambda \gg h$) şi cu amplitudine mică ($A \ll h$). Se cunoaşte adâncimea h a apei.

⋆2.1.24 Un resort cu masa $m = 2$ kg şi lungimea de $l = 4$ m în stare nedeformată este suspendat vertical. După ce la capătul liber se leagă un corp cu masa $M = 1$ kg alungirea măsurată a resortului este de $\Delta l = 10$ cm. Să se calculeze viteza undei longitudinale în resort.

Se cunoaşte valoarea acceleraţiei gravitaţionale $g = 10$ m/s^2.

2.2 Reflexia şi refracţia undelor

2.2.1 O undă armonică plană se propagă într-un mediu elastic având frecvenţa ν_1 şi viteza c_1. Întâlnind suprafaţa de separaţie cu un alt mediu elastic, unda suferă fenomenele de reflexie şi refracţie. În mediul al doilea viteza undei este c_2.

a) Care este frecvenţa undei refractate?

b) Care sunt lungimile de undă pentru undele reflectată şi refractată?

2.2.2 Un cutremur de Pământ produce undele seismice P (principale - care sunt unde longitudinale) şi S (secundare - care sunt unde transversale) care, în mod tipic, au vitezele $v_P = 8$ km/s, respectiv $v_S = 4,5$ km/s. Aceste unde se propagă prin Pământ şi sunt detectate de un seismograf aflat într-un punct de pe suprafaţa Pământului. Considerând Pământul ($R = 6370$ km) format dintr-un nucleu lichid cu raza $R_n = 3470$ km şi o manta solidă, omogenă şi izotropă se cer:

a) Distanţa dintre epicentru şi seismograf ştiind că timpul scurs între receptarea celor două unde este $\Delta t = 3,5$ minute.

b) Deschiderea unghiulară 2α dinte epicentrul cutremurului şi seismograf, măsurată din centrul Pământului.

c) Intervalul de timp $\Delta t'$ dintre cele două semnale ulterioare înregistrate de seismograf, ca urmare a sosirii in punctul unde se află seismograful a undelor seismice reflectate la interfaţa nucleu - manta.

d) Intervalul de timp τ între cele două înregistrări ale undelor P.

BCU IAŞI CENTRU UNIVERSITAR LIBRARY

⋆2.2.3 O coardă cu masa unităţii de lungime μ este supusă unei tensiuni T. Evaluând componenta transversală a tensiunii să se determine impedanţa Z a corzii, ştiind că aceasta apare ca un coeficient de rezistenţă invers proporţional cu viteza de oscilaţie punctelor de pe coardă: $T_y = Zv$.

⋆2.2.4 Două coarde cu masele unităţii de lungime μ_1, respectiv μ_2 au câte un capăt lipite între ele. Coarda astfel rezultată este supusă unei tensiuni F. Să se afle coeficienţii de reflexie şi transmisie în punctul de joncţiune al coardelor.

⋆2.2.5 Să se stabilească în ce caz reflexia undelor se face cu salt de fază şi ce valoare are acest salt?

2.2.6 O sursă oscilează conform ecuaţiei $\xi(0,t) = \cos\omega t + B\sin\omega t$. Aceste oscilaţii sunt produse într-un mediu elastic în care se pot propaga cu viteza c_1. La distanţa x_1 de sursa de oscilaţii se află suprafaţa de separaţie cu un alt mediu în care unda pătrunde normal şi se propagă cu viteza c_2. Să se scrie ecuaţia de mişcare a unui punct din mediul al doilea aflat la distanţa x_2 de suprafaţa de separaţie dintre cele două medii, dacă raportul densităţilor celor două medii este $\rho_1/\rho_2 = c_2/c_1$.

prof. Panaite Forţu

2.3 Interferenţa undelor

2.3.1 Prin suprapunerea a două unde elastice longitudinale cu amplitudini egale, frecveţe egale cu $\nu = 1$ kHz şi defazate cu $\Delta\varphi = \frac{\pi}{3}$ rezultă o undă elastică cu amplitudinea $A = 5$ cm. Ştiind că undele se propagă cu viteza $c = 2$ km/s şi că la $t = 0$ şi în $x = 0$ elongaţia produsă de prima undă este zero, să se scrie ecuaţiile elongaţiilor produse de cele două unde.

2.3.2 Un punct material dintr-un mediu cu modulul de elasticitate $E = 27$ kN/m^2 şi densitatea $\rho = 3$ g/cm^3 este supus simultan oscilaţiilor descrise de ecuaţiile $\xi_1 = 4\cos 2\pi\,(300t - 5)$ [mm] şi $\xi_2 = 3\cos 2\pi\,(300t - 4,5)$ [mm]. Se cer:

a) Să se calculeze lungimea de undă a oscilaţiilor longitudinale care interferă.

b) Să se studieze dacă în locul unde se află punctul material se obţine un minim sau un maxim de interferenţă.

c) Să se calculeze amplitudinea şi faza oscilaţiei rezultante.

2.3.3 Două ace vericale se află la distanţa $d = 3$ cm unul de altul şi oscilează în opoziţie de fază cu frecvenţa $\nu = 20$ Hz. Capetele inferioare ale acelor sunt în contact cu suprafaţa apei dintr-un vas larg, dând astfel naştere la unde superficiale transversale a căror viteză de propagare este $c = 0,1$ m/s. Dacă amplitudinea de oscilaţie a acelor este $A = 2$ mm să se afle:

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

a) Lungimea de undă a undelor superficiale.

b) Amplitudinea de oscilaţie a punctelor situate pe mediatoarea segmentului delimitat de cele două ace.

c) Amplitudinea de oscilaţie a punctului situat pe perpediculara dusă printr-un ac pe dreapta ce le conţine, astfel încât unghiul cu vârful în acest punct să fie de 30^0.

2.3.4 Ramurile unui diapazon, aflate la distanţa $d = 5$ cm unul de altul, oscilează în opoziţie de fază cu frecvenţa $\nu = 5,1$ kHz şi cu amplitudinea $A = 0,6$ mm. La $t = 0$ cele două ramuri ale diapazonului sunt apropiate una de alta. Cunoscând viteza de propagare a sunetului $c = 340$ m/s, să se determine:

a) Amplitudinea de oscilaţie a punctului O aflat la mijlocul distanţei dintre capetele diapazonului.

b) Ecuaţia de oscilaţie a unui punct situat la distanţa $l = 75$ cm de punctul O pe dreapta ce uneşte capetele diapazonului.

2.3.5 O sursă S se află la distanţa d de un detector D în plan orizontal (Fig. 2.3.5). Unda directă de la S este în fază în D cu unda de la S care este reflectată de o placă plană, orizontală, aflată la înălţimea $H \ll d$ deasupra sursei şi receptorului. Când placa urcă cu o distanţă $h \ll H$, în D nu se mai recepţionează nici o undă. Să se afle lungimea de undă a undelor emise de S.

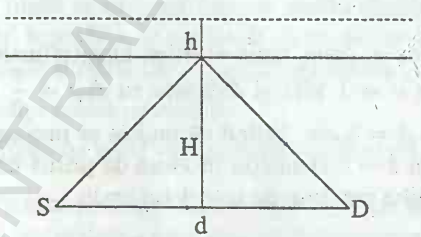


Fig. 2.3.5

2.3.6 La distanţa $l = 4$ m de un perete reflectător plan vertical se află o sursă de unde plane longitudinale cu amplitudinea $A_1 = 0,2$ mm. La distanţa L de perete, de cealaltă parte a sursei se află un receptor în dreptul căruia se formează un nod al undelor staţionare apărute ca urmare a interferenţei undelor incidente cu cele reflectate. Dacă amplitudinea undei reflectate este $A_2 = 0,15$ mm, calculaţi:

a) Amplitudinea undei în dreptul receptorului.

b) Primele patru frecvenţe ale undelor emise de sursă pentru ca în dreptul receptorului să se formeze noduri, ştiind că viteza de propagare a undelor este $c = 160$ m/s.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2.3.7 O plăcuţă de cuarţ cu grosimea d este utilizată pentru controlul frecvenţei unui circuit oscilant. În acest fel se stabilesc în cristal unde staţionare longitudinale cu ventre pe feţele lui opuse, având frecvenţa fundamentală dată de $\nu_0 = \dfrac{2,66}{d}$ (kHz). Dacă frecvenţa circuitului oscilant este de 1,2 MHz, iar densitatea cuarţului $\rho = 2,66$ g/cm^3, să se calculeze modulul de elasticitate pentru cuarţ.

2.3.8 Capetele unei bare, având densitatea $\rho = 8000$ kg/m^3 şi modulul de elasticitate $E = 2 \cdot 10^{11}$ N/m^2, oscilează cu acceaşi frecvenţă, dar cu amplitudini diferite. Oscilaţiile se propagă în bară sub forma unor unde longitudinale, astfel că într-un punct al barei ajung undele $\xi_1 = 4\cos\pi\,(10^3 t - 3,5)$ [mm] şi $\xi_2 = 5\cos\pi\,(10^3 t - 2,5)$ [mm]. Se cer:

a) frecvenţa şi lungimea de undă a undelor;

b) lungimea barei;

c) să se cerceteze dacă în punctul considerat se formează un maxim sau un minim de interferenţă;

d) amplitudinea oscilaţiilor punctului considerat;

e) numărul minimelor, respectiv al maximelor obţinute de-a lungul barei ca urmare a interferenţei celor două unde.

2.3.9 Pe suprafaţa unui lichid în repaus se află trei surse de oscilaţii S_1, S_2 şi S_3 (Fig. 2.3.9) ale căror ecuaţii de mişcare sunt: $y_1 = A\cos\omega t$, $y_2 = A\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ şi $y_3 = A'\cos\left(\omega t + \theta\right)$. Să se determine valoarea lui A' şi a lui θ astfel încât punctul O să nu oscileze.

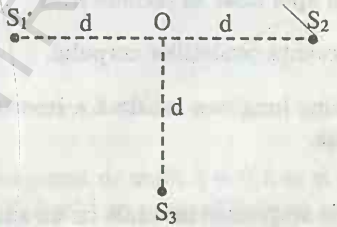


Fig. 2.3.9

2.3.10 Într-o bară omogenă cu impedanţa Z şi secţiunea S se formează unde staţionare cu pulsaţia ω şi amplitudinea A. Să se calculeze energia mecanică totală corespunzătoare porţiunii de bară cuprinsă între două noduri consecutive.

2.3.11 O coardă semiinfinită cu impedanţa Z este legată la un excitator prin intermediul unui resort cu constanta elastică K (Fig. 2.3.11). Ecuaţia de mişcare a excitatorului este $y(t) = B\cos\omega t$, iar perturbaţia produsă de unda transversală în coardă are expresia $\psi(x,t) = A\cos\left(\omega t - kx + \varphi\right)$.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

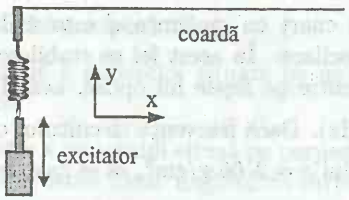


Fig. 2.3.11

Dacă $y = 0$ şi resortul relaxat atunci $\psi(0,t) = 0$. În aceste condiţii să se determine:

a) Faza iniţială φ a oscilaţiilor produse de unda transversală în coardă.

b) Raportul amplitudinilor B/A.

⋆2.3.12 O undă parcurge trei medii diferite cu suprafeţele de separaţie paralele între ele şi cu impedanţele Z_1, Z_2 şi Z_3. a) Ce relaţie trebuie să satisfacă cele trei impedanţe pentru ca la prima suprafaţă de separaţie să nu existe undă reflectată?

b) Ce grosime trebuie să aibă mediul al doilea pentru a fi satisfăcute condiţiile de la punctul (a)?

⋆2.3.13 Un resort cu masa m şi constanta de elasticitate K este suspendat pe verticală într-un punct fix. La capătul liber se suspendă un corp cu masa M. Sistemul este perturbat şi apoi lăsat să oscileze liber.

a) Să se afle frecvenţa oscilaţiilor corpului.

b) Să se determine lungimea maximă a resortului pentru ca toate spirele sale să oscileze în fază.

⋆2.3.14 Seişele sunt unde staţionare naturale cu un singur nod şi două ventre, formate în apa unor lacuri ca urmare a producerii unui cutremur sau a apariţiei bruşte a unei diferenţe de presiune atmosferică între părţi diametral opuse ale apei lacurilor. Apa acestor lacuri, pentru care lungimea este mult mai mare decât lăţimea şi adâncimea lor, oscilează ca întreg. Adâncimea medie a lacului Geneva este $h = 150$ m şi lungimea $L = 60$ km. Aproximând albia acestui lac cu un vas paralelipipedic să se afle:

a) lungimea de undă a seişelor;

b) perioada şi viteza acesui tip de unde.

BCU IAŞI CENTRU UNIVERSITY LIBRARY

2.4 Difracţia undelor

2.4.1 Cum se explică faptul că pentru a citi noaptea afară este necesar să stăm în faţa ferestrei unei camere luminate din interior, nu însă şi pentru a asculta muzica din cameră?

2.4.2 O undă progresivă armonică plană cu frecvenţa ν şi lungimea de undă λ este incidentă normal pe două fante identice situate la distanţa d una de alta. Undele difractate au aceeaşi amplitudine A_0 şi direcţia lor de propagare face acelaşi unghi θ cu normala la planul fantelor.

a) Determinaţi atât algebric, cât şi geometric amplitudinea A a undei rezultate prin interferenţa undelor difractate.

b) Arătaţi că numărul de maxime de interferenţă nu poate depăşi $2\left[\frac{d}{\lambda}\right]+1$, unde $[*]$ reprezintă partea întreagă a lui $*$.

c) Care este distanţa unghiulară dintre maximul central şi primul minim?

2.4.3 Undele oceanice cu lungimea de undă $\lambda = 5$ m sunt difractate de o spărtură cu lăţimea de 10 m dintr-un zid aflat la intrarea unui port. Pe ce interval unghiular amplitudinea undelor va depăşi $2/\pi$ din valoarea ei maximă?

2.4.4 O sursă de unde elastice emite continuu unde plane cu lungimea de undă $\lambda = 6$ m care ajung la un paravan de dimensiuni mari. În paravan este practicată o deschidere cu dimensiunea $d = 5$ m. La distanţa $L = 500$ m dincolo de paravan un receptor care se poate mişca paralel cu paravanul înregistrează două minime de intensitate intercalate de un maxim. Care este distanţa D dintre cele două minime?

2.5 Absorbţia undelor

2.5.1 O undă elastică plană cu lungimea de undă $\lambda = 0,5$ m şi coeficientul de amortizare al amplitudinii $\gamma = 0,4$ m^{-1} se propagă într-un mediu elastic omogen. Dacă punctele în care amplitudinea de oscilaţie a particulelor mediului diferă cu $\eta = 10\%$ oscilează în opoziţie de fază, să se afle distanţele de la aceste puncte la sursa de unde. Se dă $e^{-0,1} = 0,9045$.

2.5.2 La distanţa $r_1 = 5$ m de o sursă punctiformă de unde sferice aflată într-un mediu absorbant amplitudinea oscilaţiilor particulelor mediului este $A_1 = 50$ μm. Într-un punct situat la o distanţă de $p = 2$ ori mai mare amplitudinea scade de $n = 3$ ori. Să se determine:

a) coeficientul de amortizare γ al undei;

b) amplitudinea A_0 de oscilaţie a sursei.

Se dă $\ln 1,5 \simeq 0,4$.

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2.5.3 La distanţa $r_1 = 10$ m de o sursă punctiformă de unde sferice aflată într-un mediu absorbant intensitatea undei este de $n = 5$ ori mai mare decât la $r_2 = 20$ m. Să se determine coeficientul de amortizare γ al undei.

2.6 Dispersia undelor

2.6.1 Dacă ecuaţia de dispersie pentru o undă este $\omega = ak^r$, unde a şi r sunt constante, arătaţi că $v_g = rc$ pentru orice lungime de undă a undei, c fiind viteza de fază.

2.6.2 Viteza de fază a componentelor unui semnal care se propagă printr-un mediu dispersiv este dată de expresia $c = a\lambda + b$, a şi b fiind constante. Să se determine:

a) Viteza cu care se deplasează suprafeţele de amplitudine constantă.

b) După cât timp semnalul îşi recâştigă forma iniţială.

⋆2.6.3 Două unde armonice plane cu lungimile de undă λ_1 şi λ_2 se propagă în acelaşi sens cu vitezele c_1 şi c_2. Să se calculeze:

a) Distanţa minimă dintre două puncte în care cele două unde sunt în fază.

b) Viteza cu care se deplasează un astfel de punct.

⋆2.6.4 Forţele care influenţează caracteristicile valurilor sunt forţa gravitaţională şi forţa de tensiune superficială. Presupunând că nu există vârtejuri, iar apa este un fluid ideal (incompresibil şi lipsit de vâscozitate), să se determine:

a) forma traiectoriei particulelor de fluid în prezenţa valurilor (undelor pe apă);

b) ecuaţia de dispersie şi relaţia dintre vitaza de fază şi viteza de grup.

Să se discute şi cazurile extreme ale undelor de apă adâncă şi de maree (apă puţin adâncă). Se vor considera doar undele de amplitudine mică, nu şi talazurile.

Se cunosc adâncimea H a mării, densitatea apei $\rho = 1000$ kg/m^3 şi coeficientul de tensiune superficială al apei $\sigma = 0,073$ N/m.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

3 ACUSTICĂ

3.1 Unde în gaze

3.1.1 De ce putem auzi un ţânţar în zbor, dar nu şi un fluture?

⋆3.1.2 Deduceţi expresia vitezei de propagare a undelor longitudinale într-un gaz cu masa molară μ şi coeficientul adiabatic γ aflat la temperatura t utilizând teorema variaţiei impulsului.

•3.1.3 Ce valori trebuie să aibă frecvenţa ultrasunetelor folosite în investigaţiile medicale pentru a se putea detecta o tumoră cu dimensiunea caracteristică de 2 mm? Viteza ultrasunetelor în ţesutul uman este $c = 1570$ m/s.

3.1.4 Anemometrul sonic este un dispozitiv utilizat pentru determinarea vitezei curenţilor de aer. Acesta este compus din două perechi sursă -receptor aşezate antiparalel. Distanţa dintre fiecare sursă şi receptorul corespunzător este D. Anemometrul se dispune paralel cu direcţia curenţilor de aer (Fig. 3.1.4). Dacă $D = 10$ m, iar diferenţa de timp înregistrată de cele două receptoare este $\Delta t = 5$ ms, să se determine viteza v a curenţilor de aer, ştiind că viteza sunetului în aer calm este $c = 340$ m/s.

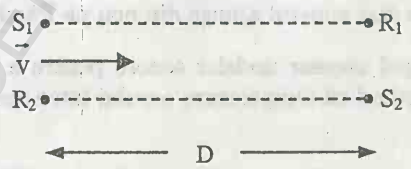


Fig. 3.1.4

3.1.5 Un fluier folosit pentru dresatul câinilor operează la frecvenţa de 23,5 kHz, în timp ce un altul la o frecvenţă apropiată, dar necunoscută.

a) fluierele folosite separat dau vreo senzaţie auditivă?

b) Care este frecvenţa fluierului al doilea dacă, folosite simultan, fluierele produc un sunet de 5 kHz?

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

•3.1.6 Liliecii utilizează ecolocaţia pentru orientarea în spaţiu. În mod tipic ei emit semnale ultrasonore cu durata de 2 ms la intervale egale cu 70 ms. Care este distanţa minimă faţă de un obstacol astfel încât ecoul să nu se suprapună peste semnalul emis? Viteza ultrasunetelor în aer este $c = 340$ m/s.

3.1.7 Raportul amplitudinilor undelor sonore în două puncte A şi B coliniare cu o sursă punctiformă de sunet care se află între ele este $n_1 = 2,49$. Dacă bate vântul pe direcţia AB, acest raport devine $n_2 = 2,61$. Cunoscând viteza sunetului $c = 340$ m/s să se determine:

a) viteza v a vântului şi sensul acestei viteze;

b) raportul k al intensităţilor undelor sonore în A şi B în prezenţa vântului.

3.1.8 O sursă de unde acustice cilindrice cu frecvenţa $\nu = 1$ kHz are intensitatea $I = 1$ W/m^2 la distanţa $r = 5$ cm de axa sursei. Cunoscând viteza de propagare a undei sonore în aer $c = 340$ m/s şi densitatea aerului $\rho = 1,293$ kg/m^3 să se calculeze:

a) Amplitudinea de oscilaţie a punctelor aflate la distanţa r de sursă.

b) Puterea sursei.

c) Intensitatea sonoră la distanţa $R = 1$ m de sursă.

d) Amplitudinea presiunii acustice la distanţa R.

3.1.9 O sursă sonoră se află la suprafaţa Pământului unde temperatura este $t_0 = 21\ ^0$C. Gradientul temperaturii atmosferei fiind $a = \dfrac{dT}{dh} = -7$ mK/m, să se calculeze:

a) înălţimea H faţă de Pământ la care viteza sunetului se anulează, precum şi temperatura din acel loc;

b) Raza de curbură a razelor sonore în funcţie de temperatură, ştiind că la înălţimea H sunetul se întoarce spre Pământ;

c) timpul τ în care sunetul ajunge din nou pe Pământ.

3.1.10 Calculaţi timpul necesar undelor sonore pentru a parcurge distanţa l dintre două puncte ştiind că temperatura aerului între acestea variază liniar de la T_1 la T_2.

3.1.11 O sursă sonoră punctiformă cu puterea $P = 0,1$ W este situată în centrul unei pături cilindrice cu raza $R = 1$ m şi înălţimea $h = 2$ m. Presupunând că peretele păturii cilindrice absoarbe total sunetul, să se determine fluxul mediu de energie care iese din pătura cilindrică în unitatea de timp.

3.1.12 O cutie paralelipipedică cu volum mare este interpusă între o sursă de unde şi un receptor aflaţi în aer. Pereţii cutiei sunt foarte subţiri şi închid un amestec de gaze în care viteza sunetului este de două ori mai mare decât în aer. Lungimea de undă a sunetului în aer este $\lambda_1 = 2$ m. Prin modificarea grosimii L a cutiei observatorul înregistrează maxime şi minime de intensitate.

BCU / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

a) Care este grosimea cutiei pentru ca receptorul să înregistreze maxime de intensitate?

b) Care este densitatea amestecului de gaze din cutie în condiţiile de la punctul precedent?

3.1.13 O undă sonoră cu lungimea de undă $\lambda = 40$ cm emisă de o sursă S intră în tubul desenat în Fig. 3.1.13. Care este valoarea minimă a lui r pentru care receptorul R va înregistra un minim de intensitate?

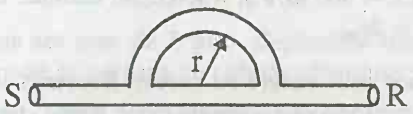


Fig. 2.1.13

⋆•3.1.14 Ecuaţia de propagare a ultrasunetelor în ţesutul uman este

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \epsilon \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^2 \partial t}$$

unde $\epsilon \ll 1$.

a) Să se determine coeficientul de absorbţie al ultrasunetelor în ţesutul uman, presupunând că acestea se propagă sub forma unor unde armonice plane.

b) Să se demonstreze de ce în investigaţiile medicale cu ultrasunete se folosesc unde cu frecvenţă relativ scăzută, deşi undele cu frecvenţă mai mare au directivitate mai bună.

3.2 Efectul Doppler

3.2.1 O sursă de unde sonore emite unde cu frecvenţa $\nu = 10$ kHz. Cu ce viteză trebuie să se deplaseze sursa faţă de observatorul în repaus pentru ca acesta să nu audă sunetul? Viteza sunetului este $c = 340$ m/s.

3.2.2 Distanţa dintre crestele valurilor produse de vânt este $\lambda = 2$ m. O barcă cu motor deplasându-se împotriva valurilor este lovită de acestea cu o frecvenţă $\nu_1 = 10$ Hz, iar dacă "fuge" de valuri cu frecvenţa $\nu_2 = 5$ Hz. Să se determine:

a) viteza c a valurilor.

b) viteza v a bărcii.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

3.2.3 Pe o axă se află o sursă de sunete cu frecvenţa $\nu_s = 1$ kHz care oscilează de-a lungul axei cu pulsaţia $\omega = 34$ rad/s şi amplitudinea $A = 10$ cm. Ce interval de frecvenţă aude un observator aflat în repaus pe axă? Viteza sunetului în aer este $c = 340$ m/s.

3.2.4 Pe o bandă de magnetofon este înregistrat sunetul unui avion care zboară direct spre microfon şi apoi se îndepărtează. Considerând că avionul zboară la altitudine constantă cu viteză constantă, mai mică decât viteza sunetului, să se determine viteza avionului. Se cunosc: viteza sunetului în aer la altitudinea la care zboară avionul $c = 330$ m/s şi frecvenţele extreme înregistrate pe banda magnetofonului $\nu_M = 2\nu_m$.

3.2.5 Două sirene în repaus emit sunete cu aceeaşi frecvenţă $\nu_0 = 440$ Hz. Un receptor se deplasează cu viteză constantă între sirene, pe linia ce le uneşte şi înregistrează 3 bătăi în 2 s. Calculaţi viteza de deplasare a receptorului dacă temperatura aerului este $t = 30\ ^0$C.

3.2.6 Să se rezolve problema precedentă în cazul în care vântul bate cu viteza în sensul în care se deplasează receptorul cu viteza:

a) $v_0 = 12$ m/s;

b) $v_0 = 50$ m/s

3.2.7 O sursă sonoră se află între un observator în repaus şi un obstacol în repaus şi se deplasează spre obstacol cu viteza $v_S = 10$ m/s emiţând sunete cu frecvenţa $\nu_s = 1$ kHz.

a) Care este frecvenţa sunetului receptat direct de la sursă?

b) Care este frecvenţa cu care se recepţionează sunetul reflectat de stâncă?

c) Care este frecvenţa bătăilor recepţionate?

Viteza sunetului în aer este 340 m/s.

3.2.8 O sursă sonoră care emite unde cu frecvenţa $\nu_s = 1$ kHz se deplasează în aerul liniştit spre un obstacol neted şi reflectător cu viteza $v_s = 10$ m/s. Obstacolul se deplasează înspre sursă cu viteza $v = 120$ m/s.

a) Care este viteza undelor emise?

b) Câte unde "lovesc" suprafaţa reflectătoare în 10 ms?

c) Care este viteza undelor reflectate?

d) Care este lungimea de undă a undelor reflectate?

Viteza sunetului în aer este 340 m/s.

3.2.9 Care este frecvenţa bătăilor înregistrate de un receptor care se află pe aceeaşi perpendiculară pe obstacolul din problema precedentă, ca şi sursa, aceasta din urmă aflându-se între obstacol şi receptor. Receptorul se deplasează cu viteza $v_r = 15$ m/s în sens opus sursei.

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

•3.2.10 Unele detectoare de puls sangvin au ca principiu fizic deplasarea Doppler a frecvenţei unui ultrasunet reflectat de către sângele în mişcare dintr-o arteră. Dacă frecvenţa ultrasunetului este de 2 MHz, viteza sunetului în sânge 1570 m/s, iar viteza de curgere a sângelui 5 cm/s orientată spre sursa de sunet, care va fi frecvenţa bătăilor înregistrată între ecou şi sunetul incident?

•3.2.11 Viteza medie de curgere a sângelui prin artera aortă în timpul sistolei este 1,5 cm/s. Ce deplasare a frecvenţei va indica un velocimetru Doppler a cărui sursă de ultrasunete are frecvenţa 0,1 MHz? Viteza sunetului în sânge este 1570 m/s.

•3.2.12 O globulă roşie are raza de 5 μm. Deplasarea frecvenţei obţinută cu un velocimetru Doppler se bazează pe reflexia ultrasunetului pe o globulă roşie.

a) Dacă frecvenţa sursei de ultrasunete este 10 MHz, să se calculeze câte globule roşii ar încăpea de-a lungul unui segment cu lungimea egală cu lungimea de undă a undei ultrasonore.

b) Care ar trebui să fie frecvenţa minimă a ultrasunetelor pentru ca reflexia pe o globulă roşie să se poată realiza?

Viteza ultrasunetelor în sânge este $c = 1570$ m/s.

•3.2.13 Velocimetrul Doppler poate fi utilizat pentru monitorizarea bătăilor inimii fătului. Dacă se utilizează ultrasunete cu frecvenţa de 2,25 MHz frecvenţa maximă a bătăilor produse între ultrasunet şi ecou este de 600 Hz.

a) Presupunând că viteza sunetului în ţesutul uman este 1570 m/s, calculaţi viteza maximă de mişcare a suprafeţei inimii fătului;

b) Dacă frecvenţa bătăilor este de 180 pe minut, ceea ce reflectă faptul că inima fătului pulsează, care este frecvenţa bătăilor inimii?

•3.2.14 Care este frecvenţa ultrasunetului recepţionat de un liliac care zboară cu viteza de 8 m/s, dacă ultrasunetul emis de acesta cu frecvenţa de 50 kHz se reflectă pe o insectă care zboară spre liliac cu viteza de 3 m/s. Viteza sunetului în aer este $c = 340$ m/s.

3.3 Unde de şoc

3.3.1 Un avion supersonic zboară la altitudinea constantă h, numărul lui Mach fiind M.

a) După cât timp va auzi un observator de pe sol avionul, de la momentul în care avionul trece pe deasupra sa?

b) Care este distanţa dintre observator şi avion în momentul în care acesta aude avionul?

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

3.3.2 Un avion zboară la altitudine constantă cu viteza v. În momentul în care un observator de pe sol aude avionul, direcţia observator - avion face unghiul α cu verticala. Să se calculeze valoarea unghiului β pe care îl face cu verticala direcţia pe care ajunge la observator zgomotul motorului în acel moment dacă numărul lui Mach $M = \frac{v}{c}$ este:

a) subunitar,

b) unitar

c) supraunitar.

Viteza sunetului în aer este c.

3.3.3 Un avion supersonic zboară la altitudine constantă, numărul lui Mach fiind $M = 2$. La momentul $t = 0$ din avion se emite un semnal sonor, iar după un timp τ altul. Ce valoare trebuie să aibă la $t = 0$ unghiul ascuţit α făcut de direcţia de zbor cu direcţia avion - observator astfel încât observatorul să audă mai întâi al doilea semnal?

3.3.4 Undele de şoc create de o barcă cu motor care se deplasează cu viteza v_0 pe un lac au deschiderea unghiulară 2θ. Deplasându-se cu aceeaşi viteză şi în acelaşi sens pe un râu care curge cu o viteză mai mică decât a bărcii, perpedicular pe direcţia de deplasare a acesteia, frontul de undă se roteşte cu un unghi φ în sensul de curgere a râului. Să se determine viteza v de curgere a râului.

3.4 Calităţile sunetului

3.4.1 Cu cât creşte nivelul intensităţii sonore al unui sunet dacă amplitudinea şi frecvenţa undei sonore care produce sunetul se dublează? Se dă $lg2 \simeq 0,3$.

3.4.2 Două aparate de radio cu nivelele maxime de intensitate sonoră de 47 dB sunt aşezate unul lângă altul. Care va fi nivelul de intensitate sonoră dacă aparatele sunt acordate pe aceeaşi frecvenţă, ştiind că $lg2 \simeq 0,3$.

3.4.3 Ştiind că intensitatea unei unde sonore corespunzătoare nivelului auditiv inferior (pragul de audibilitate) este $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2, iar cea corespunzătoare nivelului auditiv superior (pragul de durere) $I = 1$ W/m^2, să se calculeze:

a) amplitudinile presiunii sonore corespunzătoare celor două praguri în Pa, precum şi în raport cu presiunea atmosferică normală.

b) Amplitudinile vibraţiilor sonore corespunzătoare.

Se cunosc: densitatea aerului $\rho = 1,3$ kg/m^3 şi viteza sunetului în aer $c = 340$ m/s.

BCU "Al. I. Cuza" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

•3.4.4 Suprafaţa efectivă a timpanului la om este de $0,8$ cm^2. Care este puterea transmisă timpanului de o undă sonoră cu nivelul de intensitate de 40 dB dacă se neglijează reflexia undei la nivelul timpanului?

3.4.5 O undă acustică se propagă în apă ($\rho_{apă} = 1$ g/cm^3) cu viteza $c = 1450$ m/s. Dacă presiunea acustică maximă egalează presiunea atmosferică, la trecerea undelor prin apă apare fenomenul de cavitaţie (în apă apar bule de aer sau de vapori de apă). În condiţiile apariţiei cavitaţiei calculaţi:

a) Intensitatea sonoră a undelor.

b) Nivelul de intensitate sonoră corespunzător intensităţii sonore calculate mai sus.

3.4.6 Să se determine limitele razei de audibilitate a unei conversaţii în aer liber. Concret, la distanţa $r = 1$ m de o sursă sonoră de frecvenţă $\nu = 1$ kHz nivelul de intensitate auditivă este $S = 60$ foni. Neglijând absorbţia sunetului în aer, la ce distanţă de sursă sunetul nu se mai aude?

3.5 Surse sonore

3.5.1 Coarde elastice

3.5.1.1 Cum trebuie variată tensiunea dintr-o coardă pentru ca ea să emită un sunet de 3 ori mai grav?

3.5.1.2 Două coarde elastice identice sunt alungite una cu $\varepsilon_1 = 2\%$ şi cealaltă cu $\varepsilon_2 = 4\%$. Să se calculeze raportul frecvenţelor corespunzătoare modului fundamental de vibraţie al celor două coarde.

3.5.1.3 O coardă întinsă de o forţă $T_1 = 160$ N dă 20 de bătăi cu un diapazon. Ştiind că diapazonul şi coarda vibrează la unison dacă tensiunea din coardă devine $T_2 = 250$ N, să se afle frecvenţa proprie a diapazonului.

3.5.1.4 Vibraţiile produse de o coardă şi un diapazon dau 46 bătăi în 10 secunde. Dacă se micşorează lungimea corzii cu 2%, corda şi diapazonul vibrează la unison. Care este frecvenţa vibraţiilor diapazonului?

3.5.1.5 Un fir orizontal are lungimea de $1,2$ m şi masa $m = 562$ mg. Unul din capetele firul este legat de extremitatea unei ramuri a unui diapazon care oscileză cu frecvenţa de 100 Hz. Celălalt capăt al firului, trecut peste un scripete, susţine un taler foarte uşor. Ce masă M trebuie aşezată pe taler astfel încât pe coardă să se formeze patru ventre.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

3.5.1.6 Două fire metalice identice, tensionate cu aceeaşi forţă, au frecvenţa fundamentală de vibraţie $\nu_0 = 1$ kHz la 0 ^{0}C. Unul dintre fire se încălzeşte astfel încât vibraţiile produse de fire dau 3 bătăi pe secundă. Cunoscând coeficientul de dilatare termică liniară a materialului din care sunt confecţionate firele $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ grd^{-1}, să se afle temperatura t la care a fost încălzit firul.

3.5.1.7 De capătul unei ramuri a unui diapazon aşezat vertical cu ramurile în jos se leagă un fir cu lungimea $l = 2$ m şi masa $m = 12$ g. La capătul celălalt al firului se leagă un corp cu masa $M = 960$ g. Dacă diapazonul este pus în vibraţie, în fir se excită unde staţionare transversale cu noduri la capete. Să se afle:

a) Tensiunea din fir.

b) Frecvenţa vibraţiilor diapazonului dacă pe fir s-au format 10 ventre.

c) Numărul ventrelor care se formează pe fir dacă masa corpului suspendat creşte de patru ori.

3.5.1.8 O coardă elastică de lungime $l = 1$ m şi de secţiune $S = 6,25$ mm^2 este tensionată şi fixată orizontal la ambele capete. Frecvenţa fundamentală a oscilaţiilor longitudinale este $\nu_l = 2,5$ kHz, iar frecvenţa fundamentală a oscilaţiilor transversale este $\nu_t = 100$ Hz. Tensiunea din coardă este aceeaşi ca şi în cazul în care coarda ar fi fixată orizontal netensionată, dar de mijlocul ei s-ar suspenda un corp cu masa $M = 4$ kg, acesta coborând cu $h = 0,5$ cm. Să se calculeze:

a) Tensiunea T din coardă.

b) Masa m a coardei.

c) Densitatea coardei.

d) Modulul de elasticitate al materialului din care este confecţionată coarda.

Se dă valoarea accelaraţiei gravitaţionale $g = 10$ m/s^2.

3.5.2 Tuburi sonore

•3.5.2.1 Canalul auditiv al urechii umane are o lungime efectivă de 2,5 cm. Care este frecvenţa de rezonanţă a acestuia la 20 ^{0}C?

3.5.2.2 Un tub sonor închis are frecvenţa fundamentală de 150 Hz. Câte armonici apar până la 1500 Hz? Dar în cazul unui tub sonor deschis la ambele capete ce are aceeaşi frecvenţă fundamentală ca mai sus?

3.5.2.3 Un tub sonor închis are frecvenţa fundamentală de 250 Hz, viteza undelor sonore în aer fiind $c = 340$ m/s. Aflaţi:

a) lungimea tubului.

b) frecvenţa fundamentală a tubului dacă îl deschidem.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

3.5.2.4 Tubul Kundt (Fig. 3.5.2.4) este un dispozitiv construit dintr-un tub de sticlă închis la ambele capete în care se află rumeguş sau praf de plută. Tubul este aşezat orizontal, iar într-unul dintre capace este fixată o vergea metalică cu lungimea $L = 25$ cm. Dacă în vergea se excită unde elastice, pentru anumite frecvenţe ale acestora rumeguşul se aşează în movile, demonstrând astfel că în tub apar unde staţionare, vârfurile movilelor formându-se în dreptul nodurilor undelor staţionare. Dacă distanţa dintre movile este $l = 3$ cm, se cer:

a) frecvenţa undelor staţionare, ştiind că viteza undelor sonore în aerul din tub este $c = 336$ m/s;

b) viteza undelor elastice din vergea, dacă frecvenţa undelor excitate în aceasta este minimă.

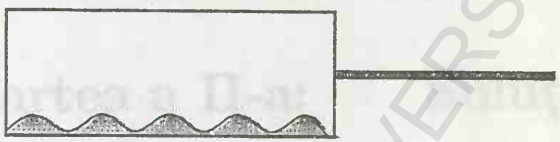


Fig. 3.5.2.4

3.5.2.5 În două tuburi sonore cu lungimi egale şi aflate în repaus, unul deschis şi celălalt închis, se excită simultan vibraţii cu frecvenţa fundamentală. Un receptor se apropie de cele două tuburi cu viteza $v = 72$ km/h şi percepe bătăi cu frecvenţa $\nu_b = 100$ Hz. Dacă viteza sunetului este $c = 340$ m/s, să se determine lungimea celor două tuburi.

3.5.2.6 Într-o eprubetă cu lungimea L se suflă aer razant cu deschiderea acesteia.

a) Să se determine modul fundamental de vibraţie al aerului din eprubetă atunci când se suflă aer cu putere nu prea mare pentru a nu excita şi armonicele superioare.

b) Dacă se excită şi armonica a doua, care sunt frecvenţele care se aud?

3.5.2.7 Deasupra unui vas cilindric cu înălţimea $h = 1$ m vibrează un diapazon cu frecvenţa $\nu = 340$ Hz. În vas se toarnă încet apă. Care este nivelul apei din vas pentru care sunetul diapazonului se amplifică considerabil? Viteza sunetului în aer este $c = 340$ m/s.

3.5.2.8 Într-un tub sonor închis cu lungimea l, temperatura aerului creşte liniar de la capătul deschis la cel închis, de la T_1 la T_2. Cunoscând valoarea $a = \sqrt{\frac{\gamma R}{\mu}}$, să se afle valoarea frecvenţei fundamentale ν_0 a sunetului produs de tub.

⋆3.5.2.9 Dacă se suflă aer razant în gura unei sticle goale, utilizate pentru îmbutelierea băuturilor, se pot excita unde staţionare în aer (viteza sunetului în aer este c).

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Sticla are volumul interior util (fără a lua în calcul volumul închis de gâtul sticlei) egal cu V_0, aria interioară a fundului sticlei S, gâtul sticlei având lungimea l şi aria secţiunii s.

a) Să se afle frecvenţa modului fundamental de vibraţie considerând sticla un tub sonor închis.

b) O astfel de sticlă este un exemplu de rezonator Helmholtz. Aceştia sunt folosiţi în general ca absorbanţi selectivi de sunet în scopul unor corecţii acustice a încăperilor. Să se afle frecvenţa oscilaţiilor aerului din rezonator şi să se compare această valoare cu cea dedusă folosind aproximaţia de la punctul (a).

Indicaţie: Aproximaţia lui Helmholtz este următoarea: aerul din volumul util al sticlei se comportă ca un resort de care este ataşată o masă egală cu masa volumului de aer din gâtul sticlei.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Partea a II-a: Soluţii

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1 OSCILAŢII MECANICE

1.1 Proprietăţi generale. Oscilatorul liniar armonic

1.1.1

$$\begin{aligned} i^i &= \left\{\cos\left[(4n+1)\frac{\pi}{2}\right] + i\sin\left[(4n+1)\frac{\pi}{2}\right]\right\}^i \\ &\equiv \left\{e^{i\left[(4n+1)\frac{\pi}{2}\right]}\right\}^i = e^{-\left[(4n+1)\frac{\pi}{2}\right]} \end{aligned}$$

Valoarea maximă a acestei expresii se obţine pentru $n = 0$ şi deci

$$i^i \cdot 10^6\$ = e^{-\frac{\pi}{2}} \cdot 10^6\$ \simeq 210.000\$$$

Deci preţul evaluatorului este mai mare decât 200.000$.

1.1.2 a)

$$x(t) = 4\sin^2\left(6\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = 2\left[1 - \cos\left(12\pi t + \frac{\pi}{2}\right)\right] \text{ (cm)}.$$

Prin urmare mişcarea este oscilatorie armonică, poziţia de echilibru a particulei este $x_0 = 2$ cm, amplitudinea $A = 2$ cm, faza iniţială $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, perioada $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{12\pi} = \frac{1}{6}$ (s), iar viteza $v = \dot{x} = 24\pi\sin\left(12\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ (cm/s).

b) Să presupunem că mişcarea este oscilatorie armonică. În acest caz ar trebui să avem

$$x(t) = A\cos(3\pi t + \varphi_0)$$

Comparând cu expresia din enunţ

$$x(t) = 3\sin 3\pi t - 4\cos 3\pi t$$

BCU ARGEŞ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

rezultă

$$\begin{cases} A\sin\varphi_0 &= -3 \\ A\cos\varphi_0 &= -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 5 \text{ cm} \\ \varphi_0 = \pi + arctg\frac{3}{4} \simeq 3,785 \text{ rad} \simeq 217^0 \end{cases}$$

de unde

$$x(t) = 5\cos\left(3\pi t + 217^0\right)$$

Prin urmare $T = \frac{2}{3}$ s, iar $v = -15\pi\sin\left(3\pi t + 217^0\right)$ cm/s.

1.1.3

$$v = \dot{x} = -\omega A\sin\left(\omega t + \varphi_0\right)$$

deoarece

$$x = A\cos\left(\omega t + \varphi_0\right)$$

Cum $x = A/2$ rezultă că $v = -\frac{\sqrt{3}}{2}\omega A = -\sqrt{3}\pi\nu A$

1.1.4 Conform enunţului

$$\begin{cases} A\cos\varphi_0 &= x_0 \\ -\omega A\sin\varphi_0 &= v_0 \end{cases}$$

de unde

$$\begin{cases} A &= \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \\ \varphi_0 &= -arctg\frac{v_0}{\omega x_0} \end{cases}$$

1.1.5 $T = 2\pi\sqrt{\frac{x_2^2 - x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}}$ şi $A = \sqrt{\frac{x_2^2 v_1^2 - x_1^2 v_2^2}{v_1^2 - v_2^2}}$

1.1.6 $A = \beta\frac{\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta}$

1.1.7 Ecuaţia de mişcare a oscilatorului este

$$x(t) = x_0 + A\cos\left(\omega t + \varphi_0\right)$$

Deoarece $E_{c\max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$, rezultă că

$$\omega = \frac{1}{A}\sqrt{\frac{2E_{c\max}}{m}} = 5 \text{ s}^{-1}$$

Cum la $t = 0$ viteza oscilatorului este nulă, acesta fiind în echilibru, faza iniţială a acestuia este

$$\varphi_0 = 0$$

Tot din enunţ rezultă că

$$x_0 = x_1 - A\cos\omega t_1 = 1 \text{ mm}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.1.8 Cum $E = \dfrac{kA^2}{2}$, iar $F = kx = k\dfrac{A}{2}$ rezultă că $A = \dfrac{E}{F} = 10$ mm.

1.1.9 Când $x = A/2$, $v = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\omega A$. Datorită şocului viteza devine $v_1 = 2v = -\sqrt{3}\omega A$, elongaţia rămânând aceeaşi. Aplicând conservarea energiei avem: $E = \dfrac{kx^2}{2} + \dfrac{mv_1^2}{2} = \frac{1}{2}k\left(\dfrac{\sqrt{13}}{2}A\right)^2$, de unde $A_1 = \dfrac{\sqrt{13}}{2}A$

1.1.10 Conform datelor din enunţ $T = ak^\alpha m^\beta$, unde a este o constantă adimensională. Trecând la dimensiuni avem: $[T] \equiv T = a\left(MT^{-2}\right)^\alpha M^\beta = aM^{\alpha+\beta}T^{-2\alpha}$. De aici rezultă $\alpha = -\beta = -\frac{1}{2}$. Prin urmare $T = a\sqrt{\dfrac{m}{k}}$. Calculele bazate pe modelul fizic concret arată că $a = 2\pi$.

1.1.11 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$. Dar $mg = ky_0 \Rightarrow \dfrac{m}{k} = \dfrac{y_0}{g}$ de unde $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{y_0}{g}}$

1.1.12 $m_1 g = ky_0$ şi $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_2}{k}}$ de unde $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_2\, y_0}{m_1\, g}} = \dfrac{\pi}{7} \simeq 0,4$ (s)

1.1.13 $T_s = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_s}} \equiv 2\pi\sqrt{\dfrac{m\,(k_1+k_2)}{k_1 k_2}}$, iar

$T_p = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_p}} \equiv 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1+k_2}}$ de unde $\dfrac{T_s}{T_p} = \sqrt{\dfrac{(k_1+k_2)^2}{k_1 k_2}}$.

Acest raport este minim când $k_1 = k_2$, iar valoarea sa minimă este $\dfrac{T_s}{T_p} = 2$

1.1.14 $T = \pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

1.1.15 $y(t) = y_0 + A\cos(\omega t + \varphi_0)$; $y_0 = \dfrac{mg}{k} = \dfrac{40}{9}$ cm; $A = 5$ cm; $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = 15$ s^{-1};

La $t = 0$, $y = A$ de unde $\varphi_0 = 0$. Prin urmare $y(t) = \dfrac{40}{9} + 5\cos 15t$ (cm)

1.1.16 $y(t) = y_0 + A\cos(\omega t + \varphi_0)$; $y_0 = \dfrac{mg}{k} = 10$ cm; $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = 10$ s^{-1}; Pentru a afla amplitudinea scriem conservarea energiei: $\dfrac{kA^2}{2} = \dfrac{k\,(y-y_0)^2}{2} + \dfrac{mv^2}{2}$ de unde $A = \sqrt{(y-y_0)^2 + \dfrac{mv^2}{k}} = 10$ cm. La $t = 0$, $v = -0.8$ m/s de unde $\sin\varphi_0 = \dfrac{v}{\omega A} = 0,8 \Rightarrow \varphi_0 \simeq 53^0 \simeq 0,9$ rad.

Prin urmare $y(t) = 10\,[1 + \cos(10t + 0,9)]$ (cm)

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.1.17
$$\begin{cases} x &= A\cos(\omega t+\varphi_0) \\ v &= -\omega A\sin(\omega t+\varphi_0) \end{cases}$$
de unde rezultă ecuaţia traiectoriei punctului reprezentativ în spaţiul fazelor (x, v)
$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{v^2}{\omega^2A^2}=1$$
care este ecuaţia unei elipse cu semiaxele A şi ωA.

1.1.18 $T_1 = T - 2\tau$, unde $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ este perioada oscilaţiilor în absenţa peretelui, iar τ este timpul în care corpul parcurge distanţa cuprinsă între $A/2$ şi A tot în absenţa peretelui:
$$\begin{aligned}\tau &= \int_{A/2}^{A}\frac{dx}{v}=\frac{1}{\omega}\int_{A/2}^{A}\frac{dx}{\sqrt{A^2-x^2}} \\ &= \frac{1}{\omega}\arcsin\frac{x}{A}\Big|_{A/2}^{A}=\frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{T}{6}\end{aligned}$$
Prin urmare
$$T_1=\frac{2}{3}T=\frac{4\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

1.1.19 a) $x_0=\dfrac{mg}{2k\sin\alpha}=\sqrt{2}\text{ m}\simeq 1{,}41\text{ m}$

b) **Metoda dinamică**

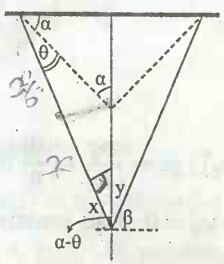


Fig. 1.1.19R

Ecuaţia de mişcare a corpului este (v. Fig. 1.1.19R)
$$m\ddot{y}=mg-2F_e\sin\beta=mg-2k(x+x_0)\sin\beta$$
Dar $\beta=\alpha+\theta$, $\theta\ll 1$ ($\cos\theta\simeq 1$ şi $\sin\theta\simeq\theta$)$\Rightarrow \sin\beta\simeq\sin\alpha+\theta\cos\alpha$
Deci
$$m\ddot{y}=-2kx\sin\alpha \qquad (1)$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

termenii $-2kx\theta\cos\alpha$ şi $x_0\theta\cos\alpha$ fiind neglijaţi deoarece conţin produse de factori foarte mici ($x\theta$ şi $x_0\theta$), ei fiind ceea ce se cheamă infiniţi mici de ordin superior (în cazul nostru de ordin doi).

Observaţie: Din analiza figurii cititorul poate deduce că $x_0\theta\cos\alpha \simeq 0$.

Din figură se deduce că

$$x = y\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = y\sin\beta \simeq y\left(\sin\alpha + \theta\cos\alpha\right) \simeq y\sin\alpha \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă

$$\ddot{y} + 2\frac{k\sin^2\alpha}{m}y = 0$$

de unde

$$T = \frac{\pi}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2m}{k}} = 2{,}8\ \text{s}$$

Metoda energetică

1. Alegând ca nivel de referinţă pentru energia potenţială nivelul la care se află corpul la echilibru, energia totală a corpului se scrie

$$\frac{m\dot{y}^2}{2} + \frac{2k\left(x + x_0\right)^2}{2} - mgy = const$$

Dar

$$x = y\sin\beta = y\sin(\alpha + \theta) = y\left(\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta\right)$$

Deoarece energiile cinetică şi potenţială sunt forme pătratice, din dezvoltarea în serie Taylor a funcţiilor trigonometrice vom reţine şi termenii pătratici

$$\begin{aligned} \sin\theta &\simeq \theta \\ \cos\theta &\simeq 1 - \frac{\theta^2}{2} \end{aligned}$$

Prin urmare

$$x = y\left(\sin\alpha - \frac{\theta^2}{2}\sin\alpha + \theta\cos\alpha\right) \simeq y\sin\alpha$$

sau

$$\frac{m\dot{y}^2}{2} + \frac{2k\left(y\sin\alpha + \frac{mg}{2k\sin\alpha}\right)^2}{2} - mgy = const$$

Derivând această ecuaţie în raport cu timpul găsim

$$\ddot{y} + \frac{2k\sin^2\alpha}{m}y = 0$$

de unde

$$T = \frac{\pi}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2m}{k}} = 2{,}8\ \text{s}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2. O altă modalitate de a afla perioada micilor oscilaţii este de a dezvolta binomul conţinut în expresia energiei potenţiale şi astfel expresia de mai sus a energiei devine

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{(2k\sin^2\alpha)\,y^2}{2} = const - k\left(\frac{mg}{2k\sin\alpha}\right)^2 = const$$

Scriind

$$\kappa = \mu\omega^2$$

unde

$$\kappa = 2k\sin^2\alpha$$

este constanta elastică echivalentă a sistemului, iar

$$\mu = m$$

este masa echivalentă a sistemului.

În aceste condiţii, din ecuaţia de mai sus deducem perioada micilor oscilaţii ale sistemului

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{\kappa}} = \frac{\pi}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2m}{k}} = 2{,}8\ \text{s}$$

1.1.20 Din conservarea energiei

$$mg\,(L+l)\sin\alpha = \frac{kl^2}{2}$$

rezultă

$$k = \frac{2mg\,(L+l)\sin\alpha}{l^2}$$

Din momentul alipirii de resort, ecuaţia de mişcare a corpului este

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - kx$$

sau

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}(x - x_0) = 0 \qquad (1)$$

unde

$$x_0 = \frac{mg\sin\alpha}{k} = \frac{l^2}{2\,(L+l)}$$

este comprimarea resortului în condiţii statice.

Ecuaţia (1) este ecuaţia oscilatorului liniar armonic a cărei soluţie este

$$x = x_0 + A\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) \qquad (2)$$

în care

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\sqrt{2g\,(L+l)\sin\alpha}}{l}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

este pulsaţia proprie a oscilatorului.

Amplitudinea şi faza iniţială se determină din condiţiile iniţiale:

la $t = 0$, $x = 0$ şi $v = v_0 = \sqrt{2gL\sin\alpha}$.

Înlocuind aceste condiţii în (2) rezultă sistemul

$$\begin{cases} A\cos\varphi_0 = -x_0 = -\dfrac{l^2}{2(L+l)} \\ A\sin\varphi_0 = -\dfrac{v_0}{\omega_0} = -l\sqrt{\dfrac{L}{L+l}} \end{cases}$$

a cărui soluţie este

$$\begin{cases} A = \dfrac{l(2L+l)}{2(L+l)} \\ \varphi_0 = \pi + arctg\left(\frac{2}{l}\sqrt{L(L+l)}\right) \end{cases}$$

În aceste condiţii (2) se scrie

$$x(t) = \frac{l}{2(L+l)}\left[l + (2L+l)\cos(\omega_0 t + \varphi_0)\right] \tag{3}$$

Comprimarea maximă a resortului se obţine când $x = l$, conform enunţului, adică

$$\cos(\omega_0\tau + \varphi_0) = 1$$

sau

$$\omega_0\tau + \varphi_0 = 2\pi$$

de unde

$$\tau = \frac{l}{\sqrt{2g(L+l)\sin\alpha}}\left[\pi - arctg\left(\frac{2}{l}\sqrt{L(L+l)}\right)\right]$$

1.1.21 Eliberând corpul şi presupunând că acesta se îndepărtează iniţial de peretele vertical, ecuaţia sa de mişcare este

$$m\ddot{x} = k_2(l_2 - x) - k_1(l_1 + x)$$

de unde

$$\ddot{x} + \frac{k_1 + k_2}{m}\left(x - \frac{k_2 l_2 - k_1 l_1}{k_1 + k_2}\right) = 0 \tag{1}$$

În ecuaţia (1)

$$x_0 = \frac{k_2 l_2 - k_1 l_1}{k_1 + k_2}$$

dă poziţia de echilibru a corpului, iar

$$\omega_0^2 = \frac{k_1 + k_2}{m}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

este pătratul pulsaţiei oscilaţiilor.

Soluţia ecuaţiei diferenţiale (1) este

$$x(t) = x_0 + A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Cum la $t = 0$, $x = 0$ şi $v = 0$ rezultă

$$\begin{cases} A &= -x_0 \\ \varphi_0 &= 0 \end{cases}$$

În concluzie

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{k_2 l_2 - k_1 l_1}{k_1 + k_2}\left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}t\right)\right] \\ &= 2\frac{k_2 l_2 - k_1 l_1}{k_1 + k_2}\sin^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}t\right) \end{aligned}$$

1.1.22 a)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 0,3 \text{ s}$$

b) Viteza corpului cu masa M după ciocnire este

$$v = 2\frac{m}{m+M}v_0 = 40 \text{ m/s}$$

Amplitudinea oscilaţiilor rezultă din conservarea energiei oscilatorului

$$A = v\sqrt{\frac{M}{k}} = 2 \text{ m}$$

c) Corpurile se despart la sfârşitul primei faze a ciocnirii: cea de comprimare. În acel moment corpurile au acceaşi viteză a cărei valoare se obţine din legea conservării impulsului

$$v' = \frac{m}{m+M}v_0 = 20 \text{ m/s}$$

Ecuaţia de mişcare a corpului cu masa M este

$$x(t) = -A\cos\omega_0 t$$

iar legea vitezei

$$v(t) = \omega_0 A\sin\omega_0 t$$

În acest caz intervalul de timp după care $v = v'$ va fi

$$\tau = \frac{1}{\omega_0}\arcsin\frac{v'}{\omega_0 A} = \sqrt{\frac{M}{k}}\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{120} = 26,2 \text{ (ms)}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.1.23

$$\begin{cases} k &= m_1 \frac{4\pi^2}{T_1^2} \\ kh &= m_2 g \\ k &= (m_1 + m_2) \frac{4\pi^2}{T_2^2} \\ \Delta T &= T_2 - T_1 \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem rezultă

a)

$$k = \frac{m_1}{\left(\frac{\pi h}{g\Delta T} - \frac{\Delta T}{4\pi}\right)^2}$$

b)

$$T_1 = \frac{2\pi^2 h}{g\Delta T} - \frac{\Delta T}{2}$$

$$T_2 = \frac{2\pi^2 h}{g\Delta T} + \frac{\Delta T}{2}$$

c)

$$m_2 = \frac{m_1 h}{g\left(\frac{\pi h}{g\Delta T} - \frac{\Delta T}{4\pi}\right)^2}$$

d)

$$k' = (m_1 + m_2)\frac{4\pi^2}{T_1^2}$$

1.1.24

$$k = \frac{mg}{h}$$

Poziţia de echilibru a platanului după ciocniri este

$$y = \frac{3mg}{k} = 3h$$

şi o vom considera drept nivel de referinţă pentru energia potenţială. Energia sistemului în punctul cel mai depărtat de poziţia de echilibru este

$$E = \frac{k\,(3h \mp A)^2}{2} \pm 3mgA = 7mgh$$

Energia sistemului imediat după ciocnire este

$$E = \frac{kh^2}{2} + 3mg \cdot 2h + \frac{3mv^2}{2} = \frac{13}{2}mgh + \frac{3mv^2}{2}$$

Din aceste relaţii se poate deduce viteza sistemului imediat după ciocnirile plastice

$$v = \sqrt{\frac{gh}{3}}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Conservarea impulsului pentru procesul de ciocnire se scrie

$$\pm 3mv = mv_2 - mv_1$$

unde semnul + corespunde urcării platanului, iar semnul − coborârii lui.

$$v_1 = \sqrt{2gh} = g\tau$$

iar

$$v_2 = v_0 - g\tau = v_0 - \sqrt{2gh}$$

Prin urmare

$$v_0 = \sqrt{gh}\left(2\sqrt{2} \pm \sqrt{3}\right)$$

Pentru a putea decide în privinţa semnului din paranteză utilizăm inegalitatea

$$v_2 > 0 \Rightarrow v_0 > \sqrt{2gh}$$

de unde

$$2\sqrt{2} \pm \sqrt{3} > \sqrt{2}$$

De aici se observă că numai semnul + convine, adică după ciocnirile simultane sistemul urcă, iar soluţia căutată este

$$v_0 = \sqrt{gh}\left(2\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) \simeq 4,56\sqrt{gh}$$

1.1.25 Perioada oscilaţiilor este

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

iar timpul de coborâre al corpului pe planul înclinat

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Viteza corpului înainte de ciocnire este

$$v_0 = \sqrt{2gh}$$

iar viteza corpului legat de resort după ciocnire

$$v = v_0$$

Amplitudinea oscilaţiilor rezultă din conservarea energiei

$$A = v_0\sqrt{\frac{m}{k}} = \sqrt{2gh} \cdot \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{2h}{\pi}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.1.26 Viteza iniţială a corpului este

$$v_0 = x_0\sqrt{k/m}$$

iar perioada

$$T = 4\left(\frac{x_0}{v_0} + \tau\right)$$

unde τ este timpul de comprimare al unuia dintre resorturi

$$\tau = \frac{T_0}{4} = \frac{\pi}{2\omega_0} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Deci

$$T = 4\sqrt{\frac{m}{k}}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$$

1.1.27 a)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$$

b) La apăsarea bruscă a capătului resortului corpul nu are timp să "simtă" acest proces, astfel încât starea iniţială a sistemului perturbat este starea cu corpul în repaus şi resortul al doilea comprimat pe distanţa a.

Ecuaţiile necesare pentru aflarea noii stări de echilibru a corpului sunt

$$\begin{cases} k_1 x_{10} &= k_2 x_{20} \\ a &= x_{10} + x_{20} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{10} &= a\dfrac{k_2}{k_1 + k_2} \\ x_{20} &= a\dfrac{k_1}{k_1 + k_2} \end{cases}$$

x_{10} dă deplasarea corpului faţă de poziţia iniţială, cu resorturile nedeformate.

c) Din conservarea energiei

$$\frac{k_2 a^2}{2} = \frac{k_1 (x_{10} \pm A)^2}{2} + \frac{k_2 (A \mp x_{20})^2}{2}$$

rezultă

$$A = a\frac{k_2}{k_1 + k_2}$$

1.1.28 $A \geq \dfrac{m + M}{k} g$

1.1.29 $\nu_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{\rho_0 g S}{m}} = \dfrac{5}{2\pi} = 0,8$ (Hz)

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.1.30 $T = 2\sqrt{\dfrac{2h}{g}}\left(\dfrac{1}{\sin\alpha} + \dfrac{1}{\sin\beta}\right)$

1.1.31 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{\rho g S\,(\cos\alpha + \cos\beta)}}$

1.1.32 Frecvenţa va fi mai mică în cazul alunecării corpului spre baza penei. Ecuaţia de mişcare a corpului este

$$ma = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha$$

de unde, ţinând cont că unghiul α este mic şi că $a = -\omega^2 A\cos\omega t$, găsim

$$\omega^2 = \frac{g\,(\mu - \alpha)}{A\cos\omega t} \geq \frac{g}{A}\,(\mu - \alpha)$$

sau

$$\nu_{\min} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{A}\,(\mu - \alpha)} = \frac{3}{\pi} = 0,95 \text{ Hz}$$

1.1.33 Conform Fig. 1.1.33R

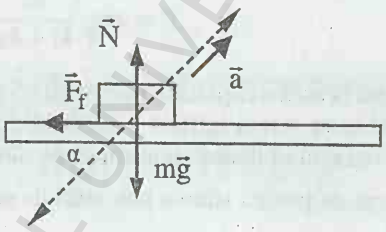


Fig. 1.1.33R

ecuaţiile de mişcare ale corpului se scriu

$$\begin{cases} ma\cos\alpha &= -\mu N \\ ma\sin\alpha &= N - mg \end{cases} \qquad (1)$$

unde

$$a = -\omega^2 A\cos\omega t$$

În aceste condiţii ecuaţiile (1) au forma

$$\begin{cases} A &= \frac{\mu g}{\omega^2(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)\cos\omega t} \\ N &= m\,(g - \omega^2 A\cos\omega t\sin\alpha) \end{cases}$$

a) Amplitudinea minimă pentru care corpul începe să alunece pe scândură este

$$A_{\min} = \frac{\mu g}{4\pi^2\nu^2\,(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)} = \frac{\sqrt{2}}{120\pi^2} \simeq 1,2 \text{ (mm)}$$

b) Amplitudinea minimă pentru care corpul se desprinde de scândură se obţine din inegalitatea $N \leq 0$ sau

$$A \geq \frac{g}{\omega^2 A\cos\omega t\sin\alpha}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

de unde

$$A_{\min} = \frac{g}{\omega^2 A \sin\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{20\pi^2} \simeq 7,2 \text{ (mm)}$$

1.1.34 a) $\dfrac{A'}{A} = \sqrt{\dfrac{M}{m+M}}$

b) $A'_{\max} = \dfrac{\mu g}{2k}(m+M)$

1.1.35 a) La echilibru

$$2T_0 \cos\alpha = mg$$

de unde

$$\cos\alpha = \frac{mg}{2T_0} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

b) Cele două jumătăţi ale firului pot fi asimilate cu resorturi elastice, fiecare cu constanta elastică k. Constanta elastică a întregului fir este $k_1 = 2k$, cele două resorturi fiind legate în paralel. Prin urmare (v. Fig. 1.1.35R)

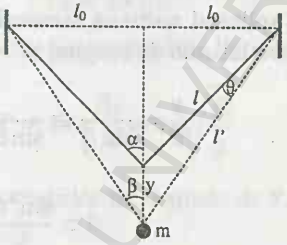


Fig. 1.1.35R

$$\begin{aligned} k_1 &= 2\frac{T_0}{\Delta l} = 2\frac{T_0}{l - l_0} = \frac{2T_0}{l_0\left(\frac{1}{\sin\alpha} - 1\right)} \\ &= \frac{2T_0}{l_0}\frac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha} = \frac{8}{3}\left(2\sqrt{3} - 3\right) \simeq 1,2 \text{ (N/m)} \end{aligned}$$

c) Ecuaţia de mişcare a corpului este

$$m\ddot{y} = mg - 2T\cos\beta$$

Tensiunea T este

$$T = k\Delta l' = kl_0\left(\frac{1}{\sin\beta} - 1\right)$$

Pe de altă parte

$$\sin\beta \equiv \sin(\alpha - \theta) \simeq \sin\alpha - \theta\cos\alpha$$

$$\frac{1}{\sin\beta} \simeq \frac{1}{\sin\alpha - \theta\cos\alpha} \simeq \frac{\sin\alpha + \theta\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

iar

$$\cos\beta = \cos(\alpha - \theta) \simeq \cos\alpha + \theta\sin\alpha$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Prin urmare

$$\begin{aligned} 2T\cos\beta &= 2kl_0\left(\frac{\sin\alpha+\theta\cos\alpha}{\sin^2\alpha}-1\right)(\cos\alpha+\theta\sin\alpha) \\ &= 2kl_0\left[(ctg\alpha-\cos\alpha)+\theta\left(1-\sin\alpha+ctg^2\alpha\right)\right] \\ &= 2T_0\frac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\left[(ctg\alpha-\cos\alpha)+\theta\left(1-\sin\alpha+ctg^2\alpha\right)\right] \\ &= mg+mg\left(tg\alpha+\frac{ctg\alpha}{1-\sin\alpha}\right)\theta \end{aligned}$$

În aceste condiţii ecuaţia de mişcare se rescrie

$$\ddot{y}+g\left(tg\alpha+\frac{ctg\alpha}{1-\sin\alpha}\right)\theta=0$$

Pentru a putea rezolva această ecuaţie trebuie aflată legătura dintre y şi θ. Aceasta rezultă aplicând teorema sinusurilor în unul dintre triunghiurile din Fig. 1.1.35R ce are laturile de lungimi y, l şi l'

$$\frac{y}{\theta}=\frac{l}{\sin\beta}=\frac{\frac{l_0}{\sin\alpha}}{\sin\alpha-\theta\cos\alpha}$$

de unde

$$\theta\simeq\frac{\sin^2\alpha}{l_0}y$$

Aşadar ecuaţia mişcării devine

$$\ddot{y}+\frac{g}{l_0}tg\alpha\frac{2\sin^2\alpha-1}{1-\sin\alpha}y=0$$

perioada oscilaţiilor fiind

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}\frac{1-\sin\alpha}{tg\alpha\left(2\sin^2\alpha-1\right)}}=2\pi\sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{2}}\simeq 3\ (\mathrm{s})$$

1.1.36 Oscilaţiile se numesc izocrone dacă perioada acestora nu depinde de amplitudine. Pentru a demonstra acest lucru vom evalua energia totală a corpului. Astfel, energia cinetică este

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\left(v_x^2+v_y^2\right)=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right) \\ &= \frac{1}{2}mR^2\left[(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta\right]\dot{\theta}^2 \\ &= mR^2\left(1-\cos\theta\right)\dot{\theta}^2=2mR^2\sin^2\frac{\theta}{2}\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

iar energia potenţială

$$E_p=mgy=mgR(1+\cos\theta)=2mgR\cos^2\frac{\theta}{2}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Notând

$$q = \cos\frac{\theta}{2}$$

expresiile energiilor devin

$$E_c = 8mR^2\dot{q}^2 = \frac{1}{2}\mu\dot{q}^2$$

unde

$$\mu = 16mR^2$$

este masa echivalentă a sistemului

şi

$$E_p = \frac{1}{2}4mgRq^2 = \frac{1}{2}\kappa q^2$$

unde

$$\kappa = 4mgR$$

este constanta elastică echivalentă a sistemului. Perioada oscilaţiilor va fi

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{\kappa}} = 4\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

Se vede de aici că perioada oscilaţiilor nu depinde de θ.

1.1.37 a) $k > 2\frac{m}{l}g$

b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{kl - 2mg}}$

1.1.38 Latura unui poligon regulat cu n laturi este [v. Fig. 1.1.38R (a)]

$$l_n = 2R\sin\frac{\pi}{n}$$

unde R este raza cercului circumscris.

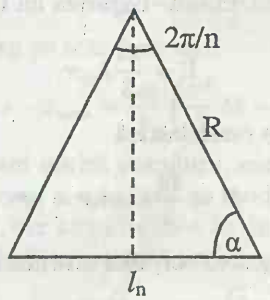


Fig. 1.1.38R (a)

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1. Crescând raza cercului cu ΔR, lungimea laturii creşte cu

$$\Delta l_n = 2\Delta R \sin\frac{\pi}{n}$$

Δl_n reprezintă alungirea fiecărui resort.

Ecuaţia de mişcare a fiecărui corp este [v. Fig. 1.1.38R (b)]

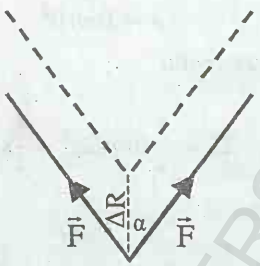


Fig. 1.1.38R (b)

$$m\,(\Delta R)^{\cdot\cdot} = -2F\cos\alpha = -2F\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = -2k\Delta l_n \sin\frac{\pi}{n}$$

de unde

$$(\Delta R)^{\cdot\cdot} + \frac{4k\sin^2\frac{\pi}{n}}{m}\Delta R = 0$$

Perioada oscilaţiilor este

$$T = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

1.1.39 În interiorul Pământului, la distanţa r de centrul acestuia, forţa gravitaţională care acţionează asupra corpului este

$$F = m\Gamma$$

unde m este masa corpului, iar Γ intensitatea câmpului gravitaţional creat de Pământ la distanţa r de centrul său. Expresia lui Γ rezultă din legea lui Gauss

$$\Gamma = \frac{4\pi}{3}k_g\rho r$$

De aici rezultă că forţa este cvasielastică

$$F = \frac{4\pi}{3}k_g\rho m r = \kappa r$$

ceea ce demonstrează că mişcarea corpului este una oscilatorie. Perioada acestor oscilaţii este

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\kappa}} = \sqrt{\frac{3\pi}{k_g\rho}} = 84,3 \text{ min}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.1.40 Ecuaţiile de mişcare faţă de Pământ sunt:

- pentru corp

$$ma_1 = -\mu mg$$

sau

$$a_1 = -\mu g$$

De aici rezultă

– timpul scurs până la oprirea corpului este

$$\tau = -\frac{v_0}{a_1} = \pi\sqrt{\frac{M}{k}}$$

– spaţiul parcurs până la oprirea corpului este

$$s = -\frac{v_0^2}{2a_1} = \frac{\pi^2}{2}\mu g\frac{M}{k}$$

- pentru scândură

$$Ma_2 = \mu mg - kx$$

sau

$$\ddot{x} + \frac{k}{M}\left(x - \mu g\frac{m}{k}\right) = 0$$

Soluţia acestei ultime ecuaţii este

$$x(t) = \mu g\frac{m}{k} + A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t + \varphi_0\right)$$

Deoarece la $t = 0$, $\dot{x} = 0$ rezultă că $\varphi_0 = 0$. Cum la acelaşi moment de timp $x = 0$, atunci $A = -\mu g\frac{m}{k}$. Prin urmare

$$x(t) = \mu g\frac{m}{k}\left(1 - \cos\sqrt{\frac{k}{M}}t\right)$$

De aici se vede că oprirea corpului se face după o semiperioadă de oscilaţie a scândurii, când şi aceasta se opreşte. Spaţiul parcurs de scândură până la oprire este

$$x_{\max} = 2\mu g\frac{m}{k}$$

Distanţa parcursă de corp pe scândură este

$$l = s - x_{\max} = \frac{\mu g}{k}\left(\frac{\pi^2}{2}M - 2m\right) \equiv L$$

Prin urmare, în momentul opririi scândurii, corpul cade de pe ea. Din acest moment ecuaţia de mişcare a scândurii se modifică, în sensul că pulsaţia oscilaţiilor rămâne aceeaşi, dar amplitudinea se dublează. În fine, soluţia ecuaţiei de mişcare pentru scândură se prezintă astfel:

$$x(t) = \begin{cases} \mu g\frac{m}{k}\left(1 - \cos\sqrt{\frac{k}{M}}t\right) & , \ t < \tau \\ 2\mu g\frac{m}{k}\left[1 - \cos\sqrt{\frac{k}{M}}(t-\tau)\right] & , \ t \geq \tau \end{cases}$$

BCU "SI" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.1.41 Metoda dinamică

La echilibru

$$kx_0 = mg\cos\theta$$

Sistemul perturbat arată ca în Fig. 1.1.41R

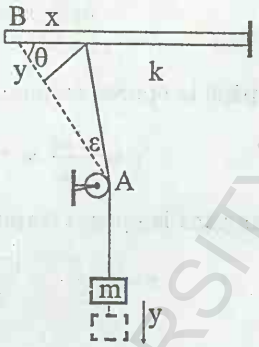


Fig. 1.1.41R

În starea perturbată, ecuaţia de mişcare a corpului se scrie

$$m\ddot{y} = mg - \frac{k(x+x_0)}{\cos(\theta+\varepsilon)}$$

Pentru a putea rezolva ecuaţia, trebuie exprimate variabilele x şi ε în funcţie de y. Din figură deducem

$$x = \frac{y}{\cos\theta}$$

şi

$$tg\varepsilon \simeq \varepsilon \simeq \frac{ytg\theta}{AB-y} \simeq \frac{y}{AB}tg\theta \ll y$$

Prin urmare ε va fi neglijat.

În aceste condiţii ecuaţia de mişcare a corpului se scrie

$$\ddot{y} + \frac{k}{m\cos^2\theta}y = 0$$

De aici rezultă perioada micilor oscilaţii ale corpului

$$T = 2\pi\cos\theta\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Metoda energetică

Neexistând frecări, energia sistemului se conservă. Considerând nivel de referinţă pentru energia potenţială gravitaţională poziţia corpului în starea de echilibru şi ţinând cont că prin această stare corpul va trece cu viteză maximă, conservarea enrgiei se scrie

$$E_{c\max} + \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}k(x_0+x)^2 - mgy$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Ţinând cont de notaţiile de mai sus rezultă

$$E_{c\max} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\frac{k}{\cos^2\theta}y^2 = const$$

De aici rezultă constanta elastică echivalentă a sistemului

$$\kappa = \frac{k}{\cos^2\theta}$$

şi perioada micilor oscilaţii

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\kappa}} = 2\pi\cos\theta\sqrt{\frac{m}{k}}$$

⋆1.1.42 Aplicând considerente energetice, se poate scrie:

- energia cinetică a corpului cu masa M este

$$E_1 = \frac{1}{2}Mv^2 \tag{1}$$

Energia cinetică a resortului se poate scrie

$$E_c = \int_0^m \frac{1}{2}v^2(x)dm$$

Deoarece resortul se întinde uniform, spirele oscilează în fază, iar viteza acestora creşte de la zero, la capătul fixat de perete, la viteza corpului cu masa M. Astfel, la distanţa x de capătul fixat al resortului, viteza elementului de masă dm este (v. Fig. 1.1.42R)

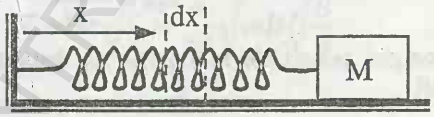


Fig. 1.1.42R

$$v(x) = \frac{x}{l}v$$

unde l este lungimea resortului. Pe de altă parte

$$dm = \frac{m}{l}dx$$

În aceste condiţii, energia cinetică a resortului se poate scrie

$$E_c = \frac{1}{2}\frac{mv^2}{l^3}\int_0^l x^2dx = \frac{1}{2}\frac{mv^2}{3} \tag{2}$$

Utilizând relaţiile (1) şi (2), energia cinetică a sistemului se scrie

$$E_c = \frac{1}{2}\left(M + \frac{m}{3}\right)v^2 = \frac{1}{2}\mu v^2$$

BCU IAŞI / CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

unde

$$\mu = M + \frac{m}{3}$$

este masa echivalentă a sistemului.

Perioada oscilaţiilor acestui oscilator este

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{M+\frac{m}{3}}{k}}$$

1.1.43 a) La echilibru

$$\frac{dE_p}{dr} \equiv E_p' = 0$$

de unde

$$r_0 = \sqrt[6]{\frac{B}{A}}$$

b) Introducând valoarea lui r_0 în expresia energiei potenţiale rezultă valoarea minimă a acesteia, deoarece în $r = r_0$

$$\left.\frac{d^2E_p}{dr^2}\right|_{r=r_0} \equiv E_p''(r_0) = 72\frac{A^2}{B}\sqrt[3]{\frac{B}{A}} > 0$$

Prin urmare

$$E_{p0} = -\frac{A^2}{B}$$

Graficul energiei potenţiale în funcţie de distanţa dintre atomi arată ca în Fig. 1.1.43R

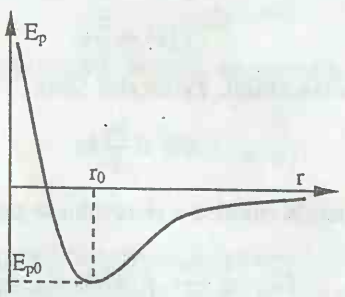


Fig. 1.1.43R

1. c) Fie $r = r_0 + \delta$, $\delta \ll r_0$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Forţa de interacţiune dintre atomi este

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F} &= -\nabla E_p = -\frac{dE_p}{dr}\widehat{r} = -\left(\frac{12A}{r^7} - \frac{12B}{r^{13}}\right)\widehat{r} \\
&= -\left[\frac{12A}{r_0^7\left(1+\frac{\delta}{r_0}\right)^7} - \frac{12B}{r_0^{13}\left(1+\frac{\delta}{r_0}\right)^{13}}\right]\widehat{r} \\
&\simeq -\frac{12}{r_0^{13}}\left[Ar_0^6\left(1-7\frac{\delta}{r_0}\right) - B\left(1-13\frac{\delta}{r_0}\right)\right]\widehat{r} \\
&= -\frac{12}{r_0^{13}}\left[Ar_0^6 - B + \left(13B - 7Ar_0^6\right)\frac{\delta}{r_0}\right]\widehat{r} \\
&= -\frac{72A^2}{B}\sqrt[3]{\frac{A}{B}}\delta\widehat{r} = -\kappa\delta\widehat{r}
\end{aligned}$$

unde

$$\kappa = \frac{72A^2}{B}\sqrt[3]{\frac{A}{B}}$$

este constanta elastică echivalentă a legăturii chimice dintre atomi.

d) Cum mişcarea a două corpuri se poate studia faţă de unul dintre ele utilizând un corp fictiv cu masa egală cu masa redusă a sistemului iniţial, în cazul nostru

$$\mu = \frac{m}{2}$$

rezultă că perioada micilor oscilaţii ale sistemului atomic este

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{\kappa}} = \frac{\pi}{6A}\sqrt{mB\sqrt[3]{\frac{B}{A}}}$$

1.1.44 a) Forţa care acţionează asupra particulei este

$$\overrightarrow{F} = -\nabla E_p = -\frac{dE_p}{dr}\widehat{x} = -2bx\widehat{x} = -\kappa x\widehat{x}$$

Deoarece forţa este cvasielastică, mişcarea particulei este oscilatorie.

b)

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2b}{m}}$$

c) Din conservarea energiei

$$\frac{1}{2}\kappa A^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

rezultă amplitudinea oscilaţiilor corpului în jurul originii

$$A = v_0\sqrt{\frac{m}{2b}}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.1.45 a) Oscilaţiile sunt simetrice faţă de origine dacă

$$\frac{1}{2}kA^2 = mgA$$

de unde

$$A = \frac{2mg}{k}$$

Aşadar energia totală a particulei este

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{2m^2g^2}{k}$$

b) Perioada oscilaţiilor este

$$T = T_1 + T_2$$

unde T_1 este jumătate din perioada oscilaţiilor dacă acestea s-ar efectua numai în câmpul forţelor elastice

$$T_1 = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

iar T_2 este tocmai timpul total de zbor al unei particule aruncate de la suprafaţa solului, pe verticală în sus cu viteza iniţială v_0 cu care particula trece prin origine

$$v_0 = A\sqrt{\frac{k}{m}} = 2g\sqrt{\frac{m}{k}}$$

şi deci

$$T_2 = 2\frac{v_0}{g} = 4\sqrt{\frac{m}{k}}$$

În concluzie

$$T = (\pi + 4)\sqrt{\frac{m}{k}}$$

1.1.46 a) $x_0 = 0$; $T = \dfrac{2\pi}{b}\sqrt{\dfrac{m}{a}}$

b) $x_0 = \dfrac{2}{b}$; $T = \dfrac{4\pi}{b^2}\sqrt{\dfrac{2m}{a}}$

c) $x_0 = \dfrac{1}{a}$; $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{me}{a}}$, unde e este baza logaritmilor naturali.

1.1.47 a) $x_0 = 0$; $T = \dfrac{2\pi}{b}\sqrt{\dfrac{m}{2a}}$

b) $x_0 = 0$; $T = \dfrac{2\pi}{b}\sqrt{\dfrac{m}{2a}}$.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.2 Pendulul matematic

1.2.1 Utilizând datele din enunţ se poate scrie $T = al^{\alpha}m^{\beta}g^{\gamma}$, unde a este o constantă adimensională. Trecând la dimensiuni $[T] \equiv T = L^{\alpha}M^{\beta}\left(LT^{-2}\right)^{\gamma}$. Identificând coeficienţii rezultă

$$\begin{cases} \alpha+\gamma &= 0 \\ \beta &= 0 \\ \alpha-2\gamma &= 1 \end{cases}$$

de unde

$$\begin{cases} \alpha &= \frac{1}{2} \\ \beta &= 0 \\ \gamma &= -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Utilizând aceste valori perioada pendulului matematic se scrie

$$T = a\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Calculele concrete arată că $a = 2\pi$.

1.2.2 Ecuaţia de mişcare a corpului este

$$\theta = \theta_0 \cos\left(\omega t + \varphi_0\right)$$

Deoarece la $t = 0$, $\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \varphi_0 = 0$. Pulsaţia oscilaţiilor unui pendul matematic este

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Cunoscând aceste informaţii puterea oscilatorului se scrie

$$\begin{aligned} P &= \frac{dL}{dt} = -mg\frac{dh}{dt} = -mg\frac{d}{dt}\left[l(1-\cos\theta)\right] = -mgl\sin\theta\dot{\theta} \\ &\simeq -mgl\theta\dot{\theta} = mgl\theta_0^2\omega\cos\omega t\sin\omega t \\ &= mg\sqrt{gl}\theta_0^2\cos\omega t\sin\omega t = \frac{1}{2}mg\sqrt{gl}\theta_0^2\sin 2\omega t \end{aligned}$$

de unde

$$\begin{aligned} \langle P\rangle &= \frac{1}{2}mg\sqrt{gl}\theta_0^2\langle\sin 2\omega t\rangle \\ &= \frac{1}{2}mg\sqrt{gl}\theta_0^2\left(\frac{4}{T}\int_0^{T/4}\sin 2\omega t dt\right) \\ &= \frac{mg\sqrt{gl}\theta_0^2}{\pi} \end{aligned}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Observaţie: Pentru unghiuri mici de deviaţie ale pendulului matematic faţă de poziţia de echilibru este valabilă legea izocronismului micilor oscilaţii: perioada oscilaţiilor nu depinde de amplitudine. Aproximaţia $\sin\theta \simeq \theta$ (rad) este valabilă atâta timp cât eroarea relativă comisă la efectuarea unei astfel de aproximaţii este mai mică decât o anumită limită. În cele ce urmează această limită va fi de $1^0/_{00}$, ceea ce înseamnă că primele trei zecimale ale lui θ practic coincid cu cele ale lui $\sin\theta$. Valoarea maximă a lui θ pentru care se realizează coincidenţa amintită este de 5^0.

1.2.3 $A = \dfrac{gT_2^2}{4\pi^2\left(\dfrac{T_2^2}{T_1^2}-1\right)}\sqrt{2\dfrac{T_2^2}{T_1^2}-1}$

1.2.4 Dacă $\beta < \alpha$, $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

Dacă $\beta > \alpha$, $T = \sqrt{\dfrac{l}{g}}\left(2\pi - 2\arccos\dfrac{\alpha}{\beta}\right)$

1.2.5 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g\sin\alpha}}$

1.2.6 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l\sin\beta}{g\cos\alpha}}$

1.2.7 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$

1.2.8 Conform Fig. 1.2.8R

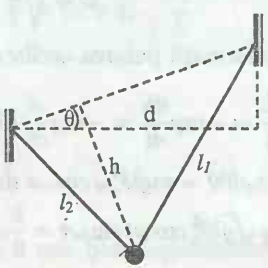


Fig. 1.2.8R

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$$

Pentru determinarea lui h se utilizează relaţiile din figură

$$\frac{d}{\cos\theta} = \sqrt{l_2^2 - h^2} + \sqrt{l_1^2 - h^2}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

de unde

$$h = \frac{\cos\theta}{2d}\sqrt{(2l_1l_2)^2 - \left[l_1^2 + l_2^2 + -\left(\frac{d}{\cos\theta}\right)^2\right]^2}$$

1.2.9

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a\left(NT\right)^2 = \frac{1}{2}aN^2 \cdot 4\pi^2\frac{l}{g - a\sin\alpha} \\ &= 2\pi^2N^2l\frac{g\sin\alpha}{g - g\sin^2\alpha} = 2\pi^2N^2l\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} \end{aligned}$$

1.2.10 Pe planul orizontal

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Platforma se mişcă încetinit pe planul înclinat cu acceleraţia

$$a = g\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right)$$

prin urmare

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g - a\sin\alpha}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\cos\alpha\left(\cos\alpha - \mu\sin\alpha\right)}}$$

Raportul perioadelor este

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\cos\alpha\left(\cos\alpha - \mu\sin\alpha\right)}$$

1.2.11 Energia cinetică a sistemului este

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{\theta}l_1\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\theta}l_2\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(m_1l_1^2 + m_2l_2^2\right)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\mu\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

iar energia potenţială

$$\begin{aligned} E_p &= m_1gl_1\left(1 - \cos\theta\right) + m_2g\left(l_1 - l_2\cos\theta\right) \\ &\simeq m_1gl_1\frac{\theta^2}{2} + m_2gl_2\frac{\theta^2}{2} + m_2g\left(l_1 - l_2\right) \\ &= \left(m_1gl_1 + m_2gl_2\right)\frac{\theta^2}{2} + m_2g\left(l_1 - l_2\right) \\ &= \kappa\frac{\theta^2}{2} + m_2g\left(l_1 - l_2\right) \end{aligned}$$

În concluzie

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{\kappa}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1l_1^2 + m_2l_2^2}{g\left(m_1l_1 + m_2l_2\right)}}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.2.12

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Conform soluţiei problemei 1.2.11, punând $m_1 = m_2$ şi $l_1 = 2l_2 = l$, rezultă

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{5l}{6g}}$$

şi deci

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{6}{5}} \simeq 1,1$$

1.2.13 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{2m_1}\left(\frac{l_1}{g}+\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}t^2\right)}$

1.3 Pendulul fizic

1.3.1 a) **Metoda dinamică:**

Ecuaţia de mişcare a barei perturbate cu un unghi mic θ faţă de verticală este

$$I\ddot{\theta} = -mg\left(\frac{l}{2}-x\right)\sin\theta \simeq -mg\left(\frac{l}{2}-x\right)\theta$$

sau

$$\ddot{\theta} + \frac{mg\,(l-2x)}{2I}\theta = 0$$

de unde

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2I}{mgl\left(1-\frac{2x}{l}\right)}}$$

Momentul de inerţie al barei faţă de punctul de suspensie este dat de teorema lui Steiner

$$\begin{aligned} I &= I_0 + m\left(\frac{l}{2}-x\right)^2 = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}-x\right)^2 \\ &= \frac{ml^2}{12}\left[1+3\left(1-\frac{2x}{l}\right)^2\right] \end{aligned}$$

Prin urmare

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{6g}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{2x}{l}\right)}+3\left(1-\frac{2x}{l}\right)\right]}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Metoda energetică

Luând ca nivel de referinţă nivelul corespunzător stării de echilibru, energia potenţială a pendulului în starea perturbată este

$$E_p = mg\left(\frac{l}{2} - x\right)(1 - \cos\theta) \simeq mg\left(\frac{l}{2} - x\right)\frac{\theta^2}{2} = \kappa\frac{\theta^2}{2}$$

Energia cinetică a pendulului în starea perturbată este

$$E_c = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$

Din aceste relaţii rezultă

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{6g}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{2x}{l}\right)} + 3\left(1 - \frac{2x}{l}\right)\right]}$$

b) Utilizând teorema din matematică: "Dacă produsul a două numere este constant, suma este minimă când numerele sunt egale", a cărei interpretare geometrică este "Dintre toate dreptunghiurile cu aceeaşi arie perimetrul minim îl are pătratul", rezultă tocmai rezultatul căutat

$$x = \frac{l}{6}\left(3 - \sqrt{3}\right) \simeq 0,2l$$

La acelaşi rezultat se poate ajunge şi anulând derivata $\frac{dT}{dx} = 0$, verificând desigur şi că $\frac{d^2T}{dx^2} > 0$. În aceste condiţii perioada de oscilaţie a pendulului este

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

⋆1.3.2 a) Prin definiţie

$$I_0 = mk_c^2$$

de unde

$$k_c = \sqrt{\frac{I_0}{m}}$$

Dar, aplicând teorema lui Steiner

$$I = I_0 + ml^2$$

rezultă

$$k_c = \sqrt{\frac{I}{m} - ml}$$

b) Prin definiţie "centrul de oscilaţie al unui pendul fizic este un alt punct de suspensie faţă de care pendulul oscilează cu aceeaşi periodă ca şi în cazul

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

iniţial". Centrul de oscilaţie se bucură de patru proprietăţi remarcabile, dintre care trei vor fi deduse aici, iar ultima în rezolvarea problemei următoare.

Perioada de oscilaţie a pendulului fizic în condiţiile din enunţ este

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}$$

Suspendat în centrul de oscilaţie, pendulul va oscila cu perioada

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{I'}{mgl'}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + ml'^2}{mgl'}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{I - ml^2 + ml'^2}{mgl'}} \end{aligned}$$

Egalând aceste ultime două expresii rezultă

$$l' = l$$

relaţie care nu convine, deoarece ea corespunde punctului iniţial de suspensie şi nu centrului de oscilaţie,

sau

$$l' = \frac{I}{ml} - l$$

Aceasta este soluţia căutată.

Pentru a deduce prima proprietate a centrului de oscilaţie, vom rescrie relaţia de mai sus

$$l' = \frac{I_0 + ml^2}{ml} - l = \frac{I_0}{ml}$$

de unde rezultă că

$$ll' = \frac{I_0}{m} = k_c^2 = const.$$

Aceasta este prima proprietate a centrului de oscilaţie: "produsul distanţelor de la centrul de masă la punctul iniţial de suspensie, respectiv la centrul de oscilaţie este egal cu pătratul razei de giraţie faţă de axa centrală paralelă cu axele de suspensie".

Pentru a deduce a doua proprietate a centrului de oscilaţie, observăm că perioada de oscilaţie a pendului faţă de punctul iniţial de suspensie se poate scrie sub forma perioadei de oscilaţie a unui pendul matematic

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}}$$

unde

$$l_r = \frac{I}{ml}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

poartă numele de lungime redusă a pendulului fizic şi se defineşte ca fiind lungimea unui pendul matematic ce oscilează sincron cu cel fizic. Expresia lungimii reduse se mai poate scrie

$$l_r = \frac{I_0 + ml^2}{ml} = \frac{I_0}{ml} + l = l' + l$$

Aceasta este a doua proprietate a centrului de oscilaţie: "distanţa de la punctul de suspensie la centrul de oscilaţie este egală cu lungimea redusă a pendulului fizic considerat".

A treia proprietate a centrului de oscilaţie se deduce din relaţia de mai sus, din care se vede că

$$l_r > l$$

adică, "centrul de oscilaţie şi punctul de suspensie se află totdeauna de o parte şi de alta a centrului de masă al pendulului fizic".

⋆1.3.3 Ecuaţia de mişcare a pendulului înainte de a lipi corpul în centrul său de oscilaţie este

$$I\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta$$

sau

$$\ddot{\theta} + \frac{mgl}{I}\theta = 0$$

de unde pătratul pulsaţiei oscilaţiilor este

$$\omega^2 = \frac{mgl}{I} \tag{1}$$

După ataşarea unui corp cu masa oarecare m', ecuaţia de mişcare a pendulului se scrie

$$\left(I + m'l_r^2\right)\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta - m'gl_r\sin\theta$$

sau

$$\ddot{\theta} + \frac{g\left(ml + m'l_r\right)}{I + m'l_r^2}\theta = 0$$

de unde pătratul pulsaţiei oscilaţiilor este

$$\omega'^2 = g\frac{ml + m'l_r}{I + m'l_r^2} \tag{2}$$

Deoarece

$$l_r = \frac{I}{ml}$$

ecuaţia (2) se rescrie

$$\omega'^2 = mgl\frac{m^2l^2 + m'I}{m^2l^2I + m'I^2} = \frac{mgl}{I} \equiv \omega^2$$

Prin urmare, "adăugând orice corp în centrul de oscilaţie al unui pendul fizic, perioada de oscilaţie a acestuia nu se modifică". Aceasta este cea de-a patra proprietate a centrului de oscilaţie.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.3.4

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}$$

Din conservarea energiei

$$mg \cdot 2l = \frac{I\omega^2}{2}$$

rezultă

$$\frac{I}{mgl} = \left(\frac{2}{\omega}\right)^2$$

Prin urmare

$$T = \frac{4\pi}{\omega}$$

1.3.5 $T = T_1 T_2 \sqrt{\frac{I_1 + I_2}{I_1 T_2^2 + I_2 T_1^2}}$

1.3.6 $L = R\sqrt{2}$; $T_{\min} = 2\pi\sqrt{2\sqrt{2}\frac{R}{g}}$

1.3.7 $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l+R}{g}}$; $T_2 = 2\pi R\sqrt{\frac{2}{5g\,(l+R)}}$; $T_1/T_2 = \sqrt{\frac{5}{2}}\left(1 + \frac{l}{R}\right)$

1.3.8 $\omega_1^2 = \frac{Mgh}{I}$; $\omega_2^2 = \frac{Mgh + mgd}{I + md^2} \Rightarrow I = md^2 \frac{\frac{g}{d} - \omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}$

1.3.9

$$l_r = \frac{2}{3} l \frac{m + 3M}{m + 2M}$$

Dacă notăm

$$l_r = \frac{l}{n}$$

atunci

$$M = m\frac{\left(n - \frac{3}{2}\right)}{3\,(1-n)}$$

Raportul

$$\frac{\left(n - \frac{3}{2}\right)}{(1-n)} > 0$$

dacă

$$n \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$$

Prin urmare

$$l_r \in \left(\frac{2}{3}l, l\right)$$

Dacă $n = 1 \Rightarrow M \gg m$ sau tija are masa neglijabilă. În acest caz $l_r = l$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Dacă $n = \frac{3}{2} \Rightarrow M = 0$ sau tija nu are ataşat la capăt nici un corp. În acest caz $l_r = \frac{2}{3}l$

În concluzie

$$l_r \in \left[\frac{2}{3}l, l\right]$$

Observaţie: Pendulul fizic considerat reprezintă de fapt un pendul matematic căruia nu i se mai poate neglija masa tijei. Perioada acestui pendul este

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\left(M + \frac{m}{3}\right)l}{\left(M + \frac{m}{2}\right)g}}$$

de unde deducem că masa echivalentă a unui oscilator armonic ce conţine un resort real cu masa m ce are legat la capăt un corp cu masa M este

$$\mu = M + \frac{m}{3}$$

Acest rezultat a fost demonstrat şi în rezolvarea problemei 1.1.42, dar pe altă cale. În fine, constanta elastică echivalentă a unui oscilator armonic real suspendat vertical este

$$\kappa = \left(M + \frac{m}{2}\right)\frac{g}{l}$$

un rezultat interesant la care vom ajunge atât la oscilaţii amortizate, cât şi la unde, dar pe baza altor raţionamente.

1.3.10 $T_2 = 2T$

1.3.11 a) Ecuaţia de mişcare a sistemului [v. Fig. 1.3.11R(a)] este

$$I\ddot{\theta} = -mg\frac{l}{2}\sin\theta - Mgl\sin\theta - 2kxd\cos\theta$$

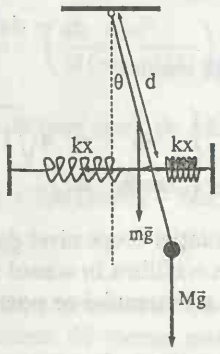


Fig. 1.3.11R (a)

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Deoarece $I = \frac{ml^2}{3} + Ml^2$, $\theta \ll 1$ rad ($\sin\theta \simeq \theta$şi $\cos\theta \simeq 1$) şi $x = d\sin\theta$, ecuaţia de mai sus se transcrie

$$\ddot{\theta} + \frac{g\left(\frac{m}{2} + M + 2\frac{k}{g}\frac{d^2}{l}\right)}{l\left(\frac{m}{3} + M\right)}\theta = 0$$

de unde

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\frac{\frac{m}{3} + M}{\frac{m}{2} + M + 2\frac{k}{g}\frac{d^2}{l}}}$$

b) Starea de echilibru a sistemului [v. Fig. 1.3.11R(b)] este starea în care rezultanta forţelor este nulă, iar momentul rezultant al forţelor faţă de orice pol este de asemenea nul.

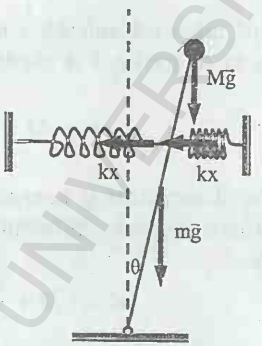


Fig. 1.3.11R (b)

Anulând momentul rezultant al forţelor faţă de articulaţie găsim deformaţia de echilibru a resorturilor

$$mg\frac{l}{2}\sin\theta_0 + Mgl\sin\theta_0 - 2kx_0d\cos\theta_0 = 0$$

de unde

$$x_0 = \frac{mgl}{4kd}\left(1 + \frac{2M}{m}\right)\mathrm{tg}\theta_0$$

Din figură însă reiese că

$$x_0 = d\sin\theta_0$$

Din aceste două relaţii rezultă

$$\begin{cases} x_0 &= d\sqrt{1 - \left[\frac{4kd^2}{gl(m+2M)}\right]^2} \\ \cos\theta_0 &= \frac{4kd^2}{gl(m+2M)} \end{cases}$$

Alegând nivelul articulaţiei drept nivel de referinţă pentru energia potenţială şi deviind sistemul de la echilibru în sensul creşterii unghiului θ_0 cu un unghi mic α, energia potenţială a sistemului se poate scrie

$$E_p = mg\frac{l}{2}\cos(\theta_0 + \alpha) + Mgl\cos(\theta_0 + \alpha) + 2\cdot\frac{1}{2}k(x + x_0)^2$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde

$$x + x_0 = d \sin(\theta_0 + \alpha)$$

Cum deplasările unghiulare sunt mici ($\sin\alpha \simeq \alpha$ şi $\cos\alpha \simeq 1$) atunci

$$\cos(\theta_0 + \alpha) = \cos\theta_0 \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) - \alpha \sin\theta_0$$

şi

$$\begin{aligned} \sin^2(\theta_0 + \alpha) &= \left[\sin\theta_0 \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) + \alpha\cos\theta_0\right]^2 \\ &\simeq \sin^2\theta_0 \left(1 - \alpha^2\right) + \alpha^2 \cos^2\theta_0 + 2\alpha \sin\theta_0 \cos\theta_0 \\ &\simeq \sin^2\theta_0 + 2\alpha \sin\theta_0 \cos\theta_0 + \alpha^2 \left(\cos^2\theta_0 - \sin^2\theta_0\right) \end{aligned}$$

În aceste condiţii expresia energiei potenţiale devine

$$\begin{aligned} E_p &= mg\frac{l}{2}\left(1 + \frac{2M}{m}\right)\left[\cos\theta_0\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) - \alpha\sin\theta_0\right] \\ &\quad + kd^2[\sin^2\theta_0 + 2\alpha\sin\theta_0\cos\theta_0 + \alpha^2\left(\cos^2\theta_0 - \sin^2\theta_0\right)] \\ &= mg\frac{l}{2}\left(1 + \frac{2M}{m}\right)\cos\theta_0 + kd^2\sin^2\theta_0 \\ &\quad + \alpha\left[-mg\frac{l}{2}\left(1 + \frac{2M}{m}\right)\sin\theta_0 + 2kd^2\sin\theta_0\cos\theta_0\right] \\ &\quad + \frac{\alpha^2}{2}\left[-mg\frac{l}{2}\left(1 + \frac{2M}{m}\right)\cos\theta_0 + 2kd^2\cos 2\theta_0\right] \\ &= E_{p0} - \kappa\frac{\alpha^2}{2} \end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned} E_{p0} &= mg\frac{l}{2}\left(1 + \frac{2M}{m}\right)\cos\theta_0 + kd^2\sin^2\theta_0 \\ &= kd^2\left[3 - \left(\frac{4kd^2}{gl\,(m+2M)}\right)^2\right] \end{aligned}$$

este energia potenţială corespunzătoare stării de echilibru, iar

$$\begin{aligned} \kappa &= g\frac{l}{2}(m+2M)\cos\theta_0 - 2kd^2\cos 2\theta_0 \\ &= 4\sin^2\theta_0 \end{aligned}$$

este constanta elastică echivalentă a sistemului. Coeficientul lui α se anulează deoarece $d\sin\theta_0 = x_0$, iar paranteza dă tocmai relaţia rezultată din anularea momentelor faţă de articulaţie, pentru starea de echilibru.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Energia cinetică a sistemului este

$$E_c = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{ml^2}{3} + Ml^2 \right) \dot{\theta}^2$$

Prin urmare

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \sqrt{\frac{I}{\kappa}} = \frac{\pi l}{x_0} \sqrt{\frac{\frac{m}{3} + M}{k}} \\ &= \frac{\pi l^2 (m + 2M) g}{d} \sqrt{\frac{m + 3M}{3k \left[g^2 l^2 (m + 2M)^2 - 16 k^2 d^4 \right]}} \end{aligned}$$

1.3.12 a) $h = \dfrac{a^2 - ab + b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

b) $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{3g}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$

1.3.13 a) Starea de echilibru a sistemului este reprezentată în Fig. 1.3.13R.

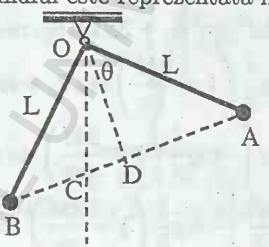


Fig. 1.3.13R

Centrul de masă este desemnat cu litera C, în A se află corpul cu masa m_1, iar în B se află corpul cu masa m_2. Distanţa de la centrul de masă la articulaţie este

$$OC = \sqrt{OD^2 + CD^2} = \sqrt{(L\cos\theta)^2 + (L\sin\theta - BC)^2}$$

Pentru a-l afla pe BC se vor utiliza definiţia centrului de masă în sistemul legat de acesta şi o egalitate geometrică

$$\begin{cases} m_2 BC &= m_1 CA \\ BC + CA &= 2L\sin\theta \end{cases}$$

Din acest sistem rezultă

$$BC = \frac{m_1}{m_1 + m_2} 2L\sin\theta$$

Prin urmare

$$OC = L\sqrt{1 - \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \sin^2\theta}$$

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

În aceste condiţii, deviind sistemul de la poziţia de echilibru cu un unghi mic α, ecuaţia de mişcare este

$$I\ddot{\alpha} = -(m_1 + m_2)\, g \cdot OC \sin\alpha$$

Ţinând cont că

$$I = (m_1 + m_2)\, L^2$$

ecuaţia de mai sus devine

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{L}\sqrt{1 - \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}\sin^2\theta}\,\alpha = 0$$

Perioada micilor oscilaţii va fi

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}\sin^2\theta}}}$$

b) Pentru $\theta = \pi/2$ bara este dreaptă şi suspendată la mijloc, iar perioada micilor oscilaţii ale sistemului este

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}\frac{m_1 + m_2}{m_2 - m_1}}$$

Pentru $m_1 = m_2$ din ecuaţia de mai sus se vede că perioada de oscilaţie tinde la infinit. Acest lucru înseamnă că poziţia de echilibru a corpului, oricare ar fi ea, este una de echilibru indiferent.

1.3.14 Lungimea redusă a unui pendul fizic este

$$l_r = \frac{I}{md}$$

unde I este momentul de inerţie al pendulului faţă de axa de rotaţie, iar d este distanţa de la punctul de suspensie la centrul de masă al pendulului.

Pentru inel

$$I = mr^2 + mr^2 = 2mr^2$$

iar

$$d = r$$

deci

$$l_r = 2r$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

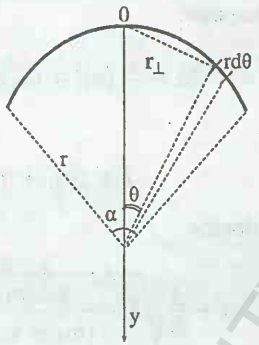


Fig. 1.3.14R

Pentru fragmentul de inel, presupunând că are deschiderea unghiulară α (Fig. 1.3.14R) şi masa unităţii de lungime λ, momentul de inerţie se scrie

$$\begin{aligned} I &= \int r_\perp^2 dm = \int_0^{\alpha r} \left(2r\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 \lambda dl \\ &= 2r^2\lambda \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} (1-\cos\theta)\, r d\theta = 2r^3\lambda\left(\alpha - 2\sin\frac{\alpha}{2}\right) \\ &= 4mr^2\left(1 - \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}\right) \end{aligned}$$

iar coordonata centrului de masă faţă de punctul de suspensie, luat ca origine a axei $0y$, este

$$\begin{aligned} d &= \frac{\int (r - r\cos\theta)\, dm}{m} = \frac{r\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} (1-\cos\theta)\,\lambda r d\theta}{\lambda\alpha r} \\ &= \frac{2r}{\alpha}\int_0^{\frac{\alpha}{2}} (1-\cos\theta)\, d\theta = \frac{2r}{\alpha}\left(\alpha - \sin\frac{\alpha}{2}\right) \\ &= 2r\left(1 - \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}\right) \end{aligned}$$

Deci

$$l_r = 2r$$

1.3.15 a)

$$l_r = \frac{I}{md} = \frac{\frac{1}{2}mr^2}{mr} = \frac{r}{2}$$

b)

$$l_r = \frac{I}{md} = \frac{\frac{mr^2}{2}}{m\frac{4r}{3\pi}} = \frac{3\pi r}{8}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

c)

$$l_r = \frac{I}{md} = \frac{\frac{ml^2}{8}}{m\frac{l}{2\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}l}{4}$$

d)

$$l_r = \frac{I}{md} = \frac{\frac{ml^2}{3}}{m\frac{l}{2}} = \frac{2l}{3}$$

1.4 Pendulul de torsiune

1.4.1 Perturbând sistemul cu un unghi mic θ (Fig. 1.4.1R), forţa care acţionează asupra fiecărui corp cu masa m este

$$F = k_g \frac{mM}{r^2}$$

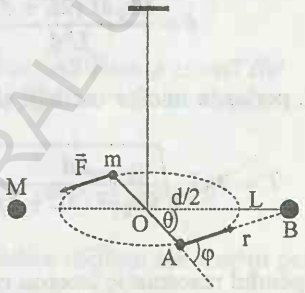


Fig. 1.4.1R

Aplicând teorema cosinusurilor în ΔOAB

$$r^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2} + L\right)^2 - 2\frac{d}{2}\left(\frac{d}{2} + L\right)\cos\theta$$

Cum $\cos\theta \simeq 1$ rezultă

$$r \simeq L$$

Prin urmare

$$F = k_g \frac{mM}{L^2} = 5{,}2 \cdot 10^{-11}\ \text{N}$$

b) Momentul rezultant al forţelor de revenire (momentul cuplului) este

$$M = -2F\frac{d}{2}\sin\varphi = -Fd\sin\varphi = -k_g\frac{mM}{r^2}d\sin\varphi$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Aplicând teorema sinusurilor în acelaşi triunghi

$$\frac{r}{\sin\theta} = \frac{\frac{d}{2}+L}{\sin(\pi-\varphi)}$$

găsim

$$\sin\varphi = \frac{\frac{d}{2}+L}{r}\sin\theta \simeq \left(1+\frac{d}{2L}\right)\theta$$

Prin urmare

$$M = -k_g\frac{mM}{2L^3}d(2L+d)\theta$$

Din ecuaţia principiului al II-lea

$$I\ddot{\theta} = M$$

unde

$$I = \frac{md^2}{12}$$

rezultă ecuaţia de mişcare a pendulului de torsiune

$$\ddot{\theta} + \frac{6k_gM(2L+d)}{L^3d}\theta = 0$$

În aceste condiţii, perioada micilor oscilaţii ale pendulului de torsiune este

$$T = 2\pi L\sqrt{\frac{Ld}{6k_gM(2L+d)}} = 1\text{h}5\text{min}12\text{s}$$

c) Perioada unui pendul matematic izocron cu cel de torsiune este

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{F}} = 2\pi L\sqrt{\frac{l}{k_gM}}$$

Comparând cele două perioade rezultă

$$l = \frac{Ld}{6(2L+d)} = 2\text{ cm}$$

1.4.2 $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{3g}}$, $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

1.4.3 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.4.4 Analizând detaliul din Fig. 1.4.4R(a), în care este reprezentat doar un vârf al plăcii, R fiind raza cercului circumscris poligonului, se pot scrie ecuaţiile

$$mg = nT\cos\varphi \simeq nT$$

şi

$$l\varphi = R\theta$$

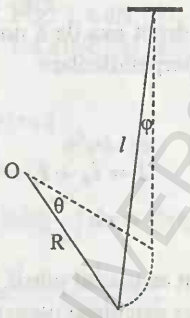


Fig. 1.4.4R (a)

de unde rezultă ecuaţia diferenţială a mişcării plăcii

$$I\ddot{\theta} = -nTR\sin\varphi \simeq -nTR\varphi$$

sau

$$\ddot{\theta} + \frac{mgR^2}{lI}\theta = 0$$

de unde rezultă perioada micilor oscilaţii ale acestui pendul de torsiune

$$T = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{lI}{mg}} \tag{1}$$

Pentru a determina expresia perioadei în funcţie de datele din enunţ trebuie evaluate raza R a cercului circumscris plăcii şi momentul de inerţie I al plăcii faţă de axa centrală verticală (perpendiculară pe planul plăcii).

Utilizând detaliul din Fig. 1.4.4R(b) în care este reprezentată doar a n-a parte din suprafaţa plăcii, se poate scrie

$$R = \frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}} \tag{2}$$

BCU Cluj / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

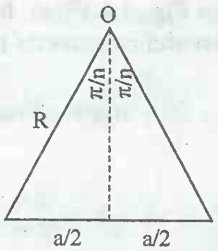


Fig. 1.4.4R (b)

Alegând axa verticală drept axa $0z$ a unui sistem cartezian tridimensional, conform teoremei axelor perpendiculare

$$I = I_x + I_y = n\,(I_{1x} + I_{1y}) \tag{3}$$

unde axele $0x$ şi $0y$ sunt în planul plăcii, iar I_{1x} şi I_{1y} sunt momentele de inerţie faţă de aceleaşi axe, dar calculate pentru o porţiune a plăcii de forma celei din Fig. 1.4.4R(b).

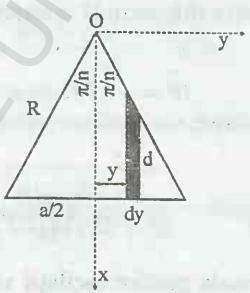


Fig. 1.4.4R (c)

Considerând densitatea superficială de masă a plăcii σ şi ţinând cont de detaliul din Fig. 1.4.4R(c) se poate scrie

$$\begin{aligned} I_{1x} &= \int_S y^2 dm = \int_{-a/2}^{a/2} y^2 \sigma d \cdot dy = 2\sigma \operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} \cdot \int_0^{a/2} y^2 \left(\frac{a}{2} - y\right) dy \\ &= 2\sigma \operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\left(\frac{a}{2}\frac{a^3}{24} - \frac{a^4}{64}\right) = \sigma \frac{a^4}{96} \operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} \\ &= \frac{\frac{m}{n}}{\frac{1}{2}a \cdot \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}} \frac{a^4}{96} \operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} = \frac{m}{n}\frac{a^2}{24} \end{aligned} \tag{4}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

B.C.U. „M. EMINESCU" IAŞI
F I Z I C Ă

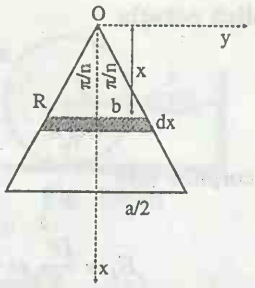


Fig. 1.4.4R (d)

Ţinând cont de detaliul din Fig. 1.4.4R(d) şi procedând ca mai sus se poate scrie

$$\begin{aligned} I_{1y} &= \int_S x^2 dm = \int_0^{\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}} x^2 \sigma b \cdot dx \\ &= \sigma \int_0^{\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}} x^2 \left(2x\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right) dx = 2\sigma\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} \int_0^{\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}} x^3 dx \\ &= 2\sigma\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} \frac{\left(\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\right)^4}{4} = \sigma\frac{a^4}{32}\operatorname{ctg}^3\frac{\pi}{n} \\ &= \frac{\frac{m}{n}}{\frac{1}{2}a \cdot \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}} \frac{a^4}{32}\operatorname{ctg}^3\frac{\pi}{n} = \frac{m}{n}\frac{a^2}{8}\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{n} \end{aligned} \tag{5}$$

Introducând (4) şi (5) în (3) găsim

$$I = n\left(\frac{m}{n}\frac{a^2}{24} + \frac{m}{n}\frac{a^2}{8}\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{n}\right) = \frac{ma^2}{24}\left(1 + 3\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{n}\right) \tag{6}$$

Introducând acum (2) şi (6) în (1) rezultă

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{\frac{l}{6g}\left(1 + 3\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{n}\right)} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{6g}\left(\sin^2\frac{\pi}{n} + 3\cos^2\frac{\pi}{n}\right)} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{l}{6g}\left(1 + 2\cos^2\frac{\pi}{n}\right)} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{6g}\left(2 + \cos\frac{2\pi}{n}\right)}. \end{aligned}$$

Dacă $n \to \infty$ poligonul devine disc, iar perioada oscilaţiilor de torsiune devine

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$$

adică rezultatul problemei precedente. Dacă placa este un pătrat ($n = 4$), atunci $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{3g}}$, etc.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.5 Oscilaţii care implică rotaţia

1.5.1 Energia cinetică a corpului este

$$E_c = \frac{I\dot{\theta}^2}{2} = \frac{mR^2\dot{\theta}^2}{2}$$

iar energia potenţială

$$E_p = \frac{k(\Delta x_1)^2}{2} + \frac{k(\Delta x_2)^2}{2} = \frac{k}{2}\left[2R\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) - R\sqrt{2}\right]^2 + \frac{k}{2}\left[2R\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) - R\sqrt{2}\right]^2$$

Cum

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{\theta}{2}\right) \simeq \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 \pm \frac{\theta}{2}\right)$$

expresia energiei potenţiale devine

$$E_p = \frac{kR^2}{2}\theta^2 = \frac{\kappa}{2}\theta^2$$

unde

$$\kappa = kR^2$$

este constanta cvasielastică a sistemului.

În concluzie, perioada micilor oscilaţii ale sistemului este

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

1.5.2 a) Dacă între disc şi suprafaţa orizontală nu există frecare, discul nu se poate rostogoli şi sistemul este echivalent cu un oscilator liniar armonic ideal a cărui perioadă de oscilaţie este

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

b) Dacă între disc şi suprafaţa orizontală nu există alunecare, punctul de contact dintre disc şi suprafaţa orizontală este axă instantanee de rotaţie. Faţă de aceasta, singura forţă care dă moment nenul este forţa elastică din resort, al cărei moment este (Fig. 1.5.2R)

$$M = -kxR = -kR^2\theta$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

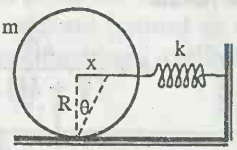


Fig. 1.5.2R

Ecuaţia de mişcare a discului este

$$M = I\ddot{\theta} = \left(\frac{mR^2}{2} + mR^2\right)\ddot{\theta} = \frac{3}{2}mR^2\ddot{\theta}$$

Din aceste două ecuaţii rezultă

$$\ddot{\theta} + \frac{2k}{3m}\theta = 0$$

perioada micilor oscilaţii fiind

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{2k}}$$

c) Dacă între disc şi planul orizontal există alunecare, discul va efectua, pe lângă rotaţie în jurul axei proprii, o mişcare de translaţie, a cărei ecuaţie este

$$m\ddot{x} = -kx - \mu mg$$

sau

$$\left(x + \frac{\mu mg}{k}\right)^{\cdot\cdot} + \frac{k}{m}\left(x + \frac{\mu mg}{k}\right) = 0$$

de unde rezultă perioada micilor oscilaţii

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

1.5.3 Ecuaţia de mişcare a sistemului este

$$I\ddot{\theta} = MgL + mg\frac{L}{2} - k\,(y + y_0)\,l$$

Deoarece

$$I = \frac{mL^2}{3} + ML^2$$

$$y_0 = \frac{MgL + mg\frac{L}{2}}{kl}$$

şi

$$y = l\theta$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ecuaţia de mişcare se rescrie

$$\ddot{\theta} + \frac{kl^2}{\left(\frac{m}{3} + M\right) L^2}\theta = 0$$

de unde

$$T = 2\pi \frac{L}{l}\sqrt{\frac{\left(\frac{m}{3} + M\right)}{k}}$$

Dacă resortul este ideal (are masa neglijabilă), atunci constanta elastică a acestuia este

$$k' = \left(\frac{l}{L}\right)^2 \frac{k}{1 + \frac{m}{3M}}$$

Dacă resortul este real, atunci masa acestuia este m şi constanta elastică

$$k'' = k\left(\frac{l}{L}\right)^2$$

1.5.4 a) $x_0 = (l+R)\sqrt{1 - \left[\frac{mg}{2k}\frac{l+2R}{(l+R)^2}\right]^2}$

b) $k \geq \frac{mg}{2}\frac{l+2R}{(l+R)^2}$

c) $T = 2\pi \frac{R}{R+l}\sqrt{\frac{M}{2k - mg\frac{l+2R}{(l+R)^2}}}$

1.5.5 a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m + \frac{M}{2}}{k}}$

b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m + \frac{M}{2}}{k}}$

c) $T = 2\pi\sqrt{\frac{4m + 3M}{k}}$

1.5.6 a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{4m + M}{k}}$

b) $T = \pi\sqrt{\frac{M}{k}}$

c) $T = \pi\sqrt{\frac{M}{k}}$

1.5.7 Pentru a demonstra că scândura execută oscilaţii armonice trebuie arătat că ecuaţia de mişcare a scândurii perturbate de la poziţia de echilibru este ecuaţia oscilatorului liniar armonic. Poziţia de echilibru a scândurii este cea în care

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

scândura este aşezată simetric pe cei doi cilindri. În Fig. 1.5.7R este reprezentată scândura într-o poziţie oarecare (centrul de masă al ei este deplasat cu distanţa x faţă de poziţia corespunzătoare echilibrului).

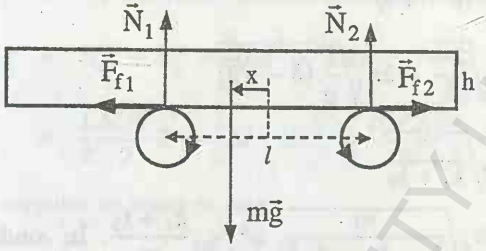


Fig. 1.5.7R

Ecuaţia de mişcare a scândurii în acest caz se scrie

$$m\ddot{x} = F_{f2} - F_{f1} = \mu\,(N_2 - N_1)$$

Cum scândura nu se desprinde de cilindri

$$N_1 + N_2 = mg$$

şi nici nu se roteşte în plan vertical, rezultanta momentelor forţelor ce acţionează asupra scândurii, evaluate faţă de centrul ei de masă este nulă, de unde

$$N_2\left(\frac{l}{2} + x\right) + \mu N_2 \frac{h}{2} = N_1\left(\frac{l}{2} - x\right) + \mu N_1 \frac{h}{2}$$

Regrupând termenii, această ultimă ecuaţie se rescrie

$$\left(\mu\frac{h}{2} + \frac{l}{2}\right)(N_1 - N_2) = x\,(N_1 + N_2)$$

Deci

$$N_1 - N_2 = \frac{2mg}{\mu h + l}x$$

Introducând acestă expresie în ecuaţia de mişcare rezultă

$$\ddot{x} + \frac{2\mu g}{\mu h + l}x = 0$$

Prin urmare mişcarea scândurii perturbate este una oscilatorie armonică cu perioada

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu h + l}{2\mu g}} \simeq 0,36 \text{ s}$$

1.5.8 a) $x_0 = \dfrac{m_2 g}{k}$

b) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}{k}}$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.5.9 a) $x_0 = \dfrac{2mg}{k}$

b) $m = \dfrac{kL}{2g}\left(3-\sqrt{2}\right)$

c) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2m}{k}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}\left(3-\sqrt{2}\right)}$

1.5.10 a) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1+k_2}}$

b) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1+k_2-m\omega^2}}$, $\omega^2 < \dfrac{k_1+k_2}{m}$. În condiţiile acestei inegalităţi poziţia corpului pentru care resorturile sunt nedeformate reprezintă starea de echilibru stabil a corpului. Dacă inegalitatea nu mai este satisfăcută, corpul se deplasează continuu spre o extremitate a tijei şi nu va mai exista o stare de echilibru stabil în jurul căreia corpul să mai poată oscila.

1.5.11 Conform enunţului, momentul de inerţie al cilindrului faţă de axa centrală, paralelă cu axa de simetrie geometrică este

$$I_0 = mk^2$$

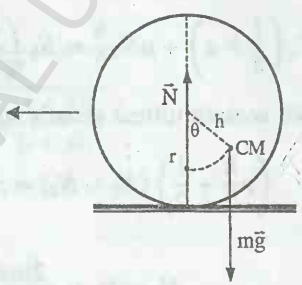


Fig. 1.5.11R

Conform Fig. 1.5.11R principiul fundamental al dinamicii faţă de dreapta de contact a cilindrului cu planul orizontal (neexistând alunecare, aceasta este axă instantanee de rotaţie) se scrie

$$\left[I_0 + m(r-h)^2\right]\ddot{\theta} = -mgh\sin\theta \simeq -mgh\theta$$

de unde

$$\ddot{\theta} + \frac{gh}{k^2+(r-h)^2}\theta = 0$$

Perioada micilor oscilaţii va fi

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k^2+(r-h)^2}{gh}}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.5.12 Metoda energetică

Alegem ca nivel de referinţă nivelul centrului de masă al cilindrului. Prin urmare energia potenţială a acestuia este nulă. Energia cinetică a cilindrului este

$$\begin{aligned} E_{c1} &= E_c^{rot} + E_c^{tr} = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{MR^2}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M \left(R\dot{\theta} \right)^2 = \frac{3MR^2}{2} \frac{\dot{\theta}^2}{2} \end{aligned} \tag{1}$$

Energia cinetică a corpului cu masa m este

$$E_{c2} = \frac{m}{2} \left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 \right)$$

Dar

$$\begin{cases} x_1 = x - l \sin\theta \simeq -(l-R)\theta \\ y_1 = -l\cos\theta \simeq -l\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \end{cases}$$

de unde

$$E_{c2} = \frac{m}{2} \left((l-R)^2 \dot{\theta}^2 + l^2 \theta^2 \dot{\theta}^2 \right) \simeq \frac{m}{2} (l-R)^2 \dot{\theta}^2 \tag{2}$$

Energia potenţială a corpului este

$$E_{p2} = mgy_1 = -mgl\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \tag{3}$$

Cu ajutorul ecuaţiilor (1)-(3) conservarea energiei se scrie

$$\left[\frac{3MR^2}{2} + m(l-R)^2 \right] \frac{\dot{\theta}^2}{2} + mgl\frac{\theta^2}{2} = const$$

De aici rezultă:

- masa echivalentă a sistemului

$$\mu = \frac{3MR^2}{2} + m(l-R)^2$$

şi

- constanta elastică echivalentă a sistemului

$$\kappa = mgl$$

Prin urmare

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{\kappa}} = 2\pi\sqrt{\frac{3MR^2 + 2m(l-R)^2}{2mgl}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\left[\frac{3M}{2m}\left(\frac{R}{l}\right)^2 + \left(1 - \frac{R}{l}\right)^2\right]} \end{aligned}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

de unde

$$l_r = l\left[\frac{3M}{2m}\left(\frac{R}{l}\right)^2 + \left(1-\frac{R}{l}\right)^2\right]$$

Metoda dinamică

Deoarece rostogolirea cilindrului se face fără alunecare, dreapta de contact a cilindrului cu masa este axă instantanee de rotaţie. Faţă de această axă ecuaţia de mişcare a sistemului se scrie

$$I\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta$$

sau

$$\left(\frac{3}{2}MR^2 + ma^2\right)\ddot{\theta} \simeq -mgl$$

Dar, conform Fig. 1.5.12

$$a^2 = l^2 + R^2 - 2lR\cos\theta \simeq l^2 + R^2 - 2lR = (l-R)^2$$

deci

$$\ddot{\theta} + \frac{2mgl}{3MR^2 + 2m(l-R)^2}\theta = 0$$

De aici rezultă acelaşi rezultat ca şi în cazul abordării energetice.

1.5.13 a) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\frac{13}{20}mR^2}{mg\cdot\frac{5}{8}R}} = \dfrac{2\pi}{5}\sqrt{26\dfrac{R}{g}}$

b) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{mR^2}{mg\cdot\frac{2}{3}R}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{3R}{2g}}$

c) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\frac{9\pi-16}{6\pi}mR^2}{mgR\frac{3\pi-4}{3\pi}}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{9\pi-16}{6\pi-8}\dfrac{R}{g}}$

d) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{mR^2}{mg\frac{R}{2}}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{2R}{g}}$

1.5.14 a) $N = (\rho_0 - \rho)\,gSL$

b) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}\dfrac{\frac{S}{2\pi L^2}+\frac{2}{3}}{\left(\frac{\rho_0}{\rho}-1\right)}}$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.5.15 Alegând ca nivel de referinţă nivelul centrului de masă al bilei aflate în poziţia de echilibru şi utilizând drept variabilă unghiul θ (Fig. 1.5.15R) energia potenţială a bilei se scrie

$$E_p = mg\,(R-r)\,(1-\cos\theta) \simeq mg\,(R-r)\,\frac{\theta^2}{2} \equiv \kappa\frac{\theta^2}{2}$$

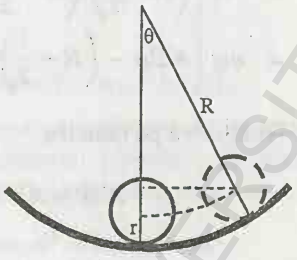


Fig. 1.5.15R

Energia cinetică a bilei este

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2 + mr^2\right)\left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{7}{10}mv^2 = \frac{7}{10}m\left[(R-r)\,\dot{\theta}\right]^2 \\ &= \frac{7}{5}m\,(R-r)^2\,\frac{\dot{\theta}^2}{2} \equiv \mu\frac{\dot{\theta}^2}{2} \end{aligned}$$

Prin urmare

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{\kappa}} = 2\pi\sqrt{\frac{7\,(R-r)}{5g}}$$

1.5.16 a) În starea perturbată cubul arată ca în Fig. 1.5.16R.

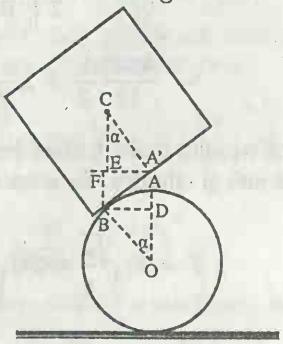


Fig. 1.5.16R

Alegând drept nivel de referinţă nivelul centrului de masă al cubului în starea

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

de echilibru, energia potenţială în starea perturbată se scrie

$$\begin{aligned} E_p &= mg\left(OD + BF + EC - R - \frac{l}{2}\right) \\ &= mg\left(R\cos\alpha + A'B\sin\alpha + \frac{l}{2}\cos\alpha - R - \frac{l}{2}\right) \\ &\simeq mg\left[\left(R+\frac{l}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right) + A'B\alpha - \left(R+\frac{l}{2}\right)\right] \\ &= mg\left[A'B\alpha - \left(R+\frac{l}{2}\right)\frac{\alpha^2}{2}\right] \end{aligned}$$

Deoarece cubul nu alunecă pe cilindru

$$A'B = AB = R\alpha$$

Prin urmare

$$E_p = mg\left(R - \frac{l}{2}\right)\frac{\alpha^2}{2} \equiv \kappa\frac{\alpha^2}{2}$$

unde

$$\kappa = mg\left(R - \frac{l}{2}\right)$$

este constanta elastică echivalentă a sistemului.

Poziţia de echilibru este una de echilibru stabil dacă

$$R > \frac{l}{2}$$

b) Energia cinetică a cubului se poate scrie

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{ml^2}{6} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]\omega^2 \\ &= \frac{5ml^2}{12}\frac{\dot{\alpha}^2}{2} \equiv \mu\frac{\dot{\alpha}^2}{2} \end{aligned}$$

deoarece mişcarea cubului poate fi considerată ca fiind o rotaţie în jurul dreptei de contact dintre cub şi cilindru. În aceste condiţii

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{\kappa}} = 2\pi l\sqrt{\frac{5}{6g\,(2R-l)}}$$

1.5.17 $T = \dfrac{\pi l}{\sqrt{gR}}$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

⋆1.5.18 La echilibru greutatea corpului suspendat esta egală cu tensiunea din fir, care joacă rol de forţă centripetă pentru corpul de pe masă

$$mg = m\omega^2 d \tag{1}$$

La deplasarea pe verticală (în jos de exemplu) a corpului suspendat pe o distanţă $\delta \ll d$, euaţiile de mişcare ale celor două corpuri se scriu

$$m\ddot{\delta} = mg - T \tag{2}$$

şi

$$m\ddot{\delta} = T - m\omega'^2 (d - \delta)$$

Valoarea noii viteze unghiulare ω' se determină din legea conservării momentului cinetic, deoarece momentul rezultant al forţelor care acţionează asupra corpului de pe masă, în raport cu gaura practicată în masă, este nul

$$m\omega d^2 = m\omega' (d - \delta)^2$$

sau

$$\omega' = \omega \left(1 - \frac{\delta}{d}\right)^{-2} \simeq \omega \left(1 + 2\frac{\delta}{d}\right)$$

În aceste condiţii ecuaţia de mişcare a corpului de pe masă se scrie

$$\begin{aligned} m\ddot{\delta} &= T - m\omega^2 \left(1 + 4\frac{\delta}{d}\right)(d - \delta) \simeq T - m\omega^2 d \left(1 + 3\frac{\delta}{d}\right) \\ &= T - mg - 3m\omega^2 \delta \end{aligned} \tag{1}$$

Adunând ecuaţiile (2) şi (3) membru cu membru rezultă

$$\ddot{\delta} + \frac{3}{2}\omega^2 \delta = 0$$

de unde

$$T = \frac{2\pi\sqrt{6}}{3\omega}$$

⋆1.5.19 Forţa de atracţie gravitaţională care acţionează asupra satelitului înainte de impactul cu meteoritul joacă rol de forţă centripetă

$$k_g \frac{mM}{R^2} = m\omega^2 R = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$$

de unde

$$k_g \frac{M}{R^2} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$$

După impact, ecuaţia de mişcare radială a satelitului este

$$m\ddot{r} = k_g \frac{mM}{(R - r)^2} - m\omega'^2 (R - r)$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Deoarece momentul cinetic se conservă

$$m\frac{2\pi}{T}R^2 = m\omega'(R-r)^2$$

ecuaţia de mişcare a satelitului se rescrie

$$\ddot{r} + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r = 0$$

de unde rezultă perioada oscilaţiilor radiale ale satelitului

$$T_0 = T$$

⋆1.5.20 a) Din Fig. 1.5.20R rezultă

$$\begin{cases} N\cos\alpha &= m\omega^2 r_0 \sin\alpha \\ N\sin\alpha &= mg \end{cases}$$

de aici se găseşte că

$$\omega = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{g\cos\alpha}{r_0}}$$

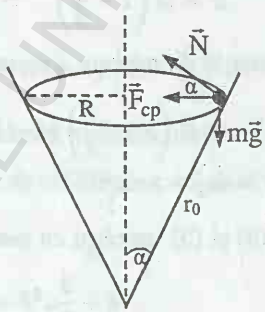


Fig. 1.5.20R

b) Perturbând orbita corpului astfel încât $r = r_0 + \delta$, $\delta \ll r_0$, ecuaţia de mişcare a corpului de-a lungul generatoarei pânzei conice este

$$m\ddot{\delta} = -mg\cos\alpha + m\omega'^2(r_0+\delta)\sin^2\alpha$$

Noua viteză unghiulară se obţine din conservarea momentului cinetic

$$m\omega r_0^2 \sin^2\alpha = m\omega'(r_0+\delta)^2\sin^2\alpha$$

sau

$$\omega' \simeq \omega\left(1 - 2\frac{\delta}{r_0}\right)$$

În aceste condiţii ecuaţia de mişcare capătă forma

$$\ddot{\delta} + \frac{3g\cos\alpha}{r_0}\delta = 0$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ceea ce arată că orbita inițială este stabilă. În urma acțiunii unei mici perturbații corpul va oscila în jurul orbitei stabile cu perioada

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r_0}{3g\cos\alpha}}$$

⋆1.5.21 Înaintea acțiunii perturbației radiale, forța elastică joacă rol de forță centripetă

$$k\Delta r_0 = m\omega^2 r_0$$

În urma acțiunii perturbației, ecuația de mișcare a corpului se scrie

$$m\ddot{\delta} = m\omega'^2(r_0+\delta) - k(\Delta r_0+\delta)$$

viteza unghiulară ω' rezultând din conservarea momentului cinetic

$$\omega' = \omega\left(1-2\frac{\delta}{r_0}\right)$$

În aceste circumstanțe

$$\ddot{\delta} + \left(3\omega^2 + \frac{k}{m}\right)\delta = 0$$

de unde pulsația oscilațiilor radiale ale corpului este

$$\omega_r = \sqrt{3\omega^2 + \frac{k}{m}}$$

⋆1.5.22 a) Într-un câmp central de forțe energia totală se conservă

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + E_p = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_p^{eff} = const$$

În această ecuație primul termen este partea din energia cinetică a corpului ca urmare a mișcării sale radiale, iar al doilea termen reprezintă partea din energia cinetică a corpului datorată mișcării unghiulare a acestuia. Ultimii doi termeni din primul membru al egalității de mai sus, ambii depinzând de coordonata radială, pot fi considerați împreună ca formând energia potențială efectivă a corpului. În acest fel problema se simplifică, transformându-se într-una de studiu a unei mișcări unidimensionale.

În cazul concret al acestei probleme, energia potențială efectivă a Pământului este

$$E_p^{eff} = -k\frac{mM}{r} + \frac{\alpha m r^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

Cum orbita Pământului este stabilă

$$\begin{cases} \left.\dfrac{dE_p^{eff}}{dr}\right|_{r=r_0} = 0 \\ \left.\dfrac{d^2E_p^{eff}}{dr^2}\right|_{r=r_0} > 0 \end{cases}$$

BCUIAȘI CENTRALĂ UNIVERSITY LIBRARY

Scriind

$$r = r_0 + x$$

energia potenţială efectivă se scrie

$$E_p^{eff}(r) = E_p^{eff}(r_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2E_p^{eff}}{dr^2}\right|_{r=r_0} \cdot x^2$$

De aici se vede că derivata a doua a energiei potenţiale efective joacă rolul constantei elastice echivalente a sistemului studiat şi deci pulsaţia micilor oscilaţii radiale ale Pământului este

$$\omega_r = \sqrt{\frac{\left.\dfrac{d^2E_p^{eff}}{dr^2}\right|_{r=r_0}}{m}}$$

Din prima condiţie de stabilitate a orbitei rezultă

$$kM = \left(\omega_0^2 - \alpha\right) r_0^3$$

unde s-a ţinut seama că momentul cinetic se conservă şi că pentru orbita stabilă are valoarea

$$L = m\omega_0 r_0^2$$

A doua condiţie de stabilitate conduce la

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^2E_p^{eff}}{dr^2}\right|_{r=r_0} &= -2\frac{kmM}{r_0^3} + m\alpha + \frac{3L^2}{mr_0^4} \\ &= m\left(\omega_0^2 + 3\alpha\right)\end{aligned}$$

Prin urmare

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 + 3\alpha} \simeq \omega_0\left(1 + \frac{3\alpha}{2\omega_0^2}\right) = \omega_0 + \frac{3\alpha}{2\omega_0} > \omega_0$$

De aici rezultă rata de precesie

$$\Delta\omega = \omega_r - \omega_0 = \frac{3\alpha}{2\omega_0}$$

b) Cum $\omega_r > \omega_0$, precesia se face în sens opus rotaţiei (Fig. 1.5.22R)

$$\overrightarrow{\Delta\omega} = \vec{\omega}_0 - \vec{\omega}_r = \omega_0\hat{\omega} - \omega_r\hat{\omega} = -\Delta\omega\hat{\omega}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

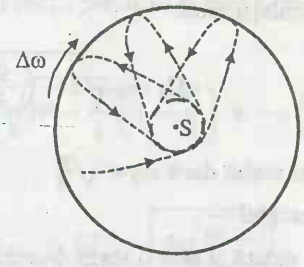


Fig. 1.5.22R

⋆1.5.23 $\omega_r = \sqrt{3}\omega_0$

1.5.24 a)

$$I\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta + \left(m\omega^2 l\sin\theta\right) l\cos\theta$$

Deoarece

$$I = ml^2$$

ecuaţia de mai sus devine

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{l} - \omega^2\cos\theta\right)\sin\theta = 0$$

b) La echilibru

$$\theta_1 = 0$$

sau

$$\theta_2 = \arccos\frac{g}{\omega^2 l}$$

Dacă $\omega < \sqrt{\frac{g}{l}}$ poziţia $\theta_1 = 0$ este una de echilibru stabil, iar a doua poziţie nu există. Pentru unghiuri mici în vecinătatea lui $\theta_1 = 0$, soluţia ecuaţiei de mişcare este

$$\theta = A_1\cos\left(\Omega_1 t + \varphi_1\right)$$

unde

$$\Omega_1 = \omega\sqrt{\frac{g}{\omega^2 l} - 1}$$

Dacă $\omega > \sqrt{\frac{g}{l}}$ poziţia $\theta_1 = 0$ este una de echilibru instabil, iar a doua poziţie este de echilibru stabil. Pentru unghiuri mici în vecinătatea lui θ_2, adică $\theta = \theta_2 + \alpha$, $\alpha \ll \theta_2$, ecuaţia de mişcare se scrie

$$\ddot{\alpha} + \omega^2\left[1 - \left(\frac{g}{\omega^2 l}\right)^2\right]\alpha = 0$$

de unde

$$\alpha = A_2\cos\left(\Omega_2 t + \varphi_2\right)$$

BCU "SI" / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

pulsaţia acestor oscilaţii fiind

$$\Omega_2 = \omega\sqrt{1-\left(\frac{g}{\omega^2 l}\right)^2}$$

1.5.25 a) $\theta = 0$, echilibru stabil dacă $\omega_0 < \sqrt{\frac{g}{R}}$

$\theta = \pi$, echilibru instabil

$\theta = \arccos\frac{1}{\omega_0}\sqrt{\frac{g}{R}}$, există şi este o stare de echilibru stabil dacă $\omega_0 > \sqrt{\frac{g}{R}}$

b) $\Omega_1 = \omega_0\sqrt{\frac{g}{\omega_0^2 R}-1}$, dacă $\omega_0 < \sqrt{\frac{g}{R}}$

$\Omega_2 = \omega_0\sqrt{1-\left(\frac{g}{\omega_0^2 R}\right)^2}$, dacă $\omega_0 > \sqrt{\frac{g}{R}}$

1.5.26 Centrul de masă al tijei se mişcă pe un cerc (Fig. 1.5.26R) cu raza

$$d = \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}$$

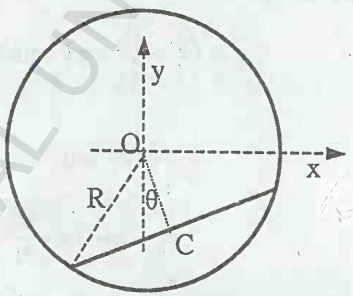


Fig. 1.5.26R

Energia cinetică a tijei este

$$E_c = \frac{1}{2}md^2 + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\theta}^2 = m\left(d^2 + \frac{l^2}{12}\right)\frac{\dot{\theta}^2}{2}$$
$$= m\left(R^2 - \frac{l^2}{6}\right)\frac{\dot{\theta}^2}{2} \equiv \mu\frac{\dot{\theta}^2}{2}$$

iar cea potenţială

$$E_p = -mgd\cos\theta \simeq -mg\sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \equiv -\kappa\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)$$

Poziţiile de echilibru stabil sunt cele pentru care prima derivată a energiei potenţiale se anulează, iar a doua derivată este pozitivă. Calculele arată că poziţiile de echilibru sunt $\theta = 0$ şi $\theta = \pi$. Poziţia de echilibru stabil este, după

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

cum era şi evident, $\theta = 0$. Pentru perturbaţii mici în jurul acestei valori, energia potenţială se scrie

$$E_p \simeq -mg\sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \equiv -\kappa\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)$$

În aceste condiţii

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{\mu}} = \sqrt{\frac{g\sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}}{R^2 - \frac{l^2}{6}}}$$

1.6 Compunerea oscilaţiilor

1.6.1 Compunerea oscilaţiilor paralele

1.6.1.1 Metoda diagramelor fazoriale sau metoda Fresnel [Fig. 1.6.1.1R(a)], utilizată pentru compunerea oscilaţiilor paralele cu aceeaşi pulsaţie, constă în reprezentarea oscilaţiilor cu ajutorul unor vectori ficşi. Modulul fiecărui vector este egal cu amplitudinea fiecărei oscilaţii care se compune, iar înclinarea vectorului faţă de axa $0x$ este egală cu faza iniţială a oscilaţiei. Axele de coordonate se rotesc cu viteza unghiulară $(-\omega)$, ceea ce înseamnă că faza ωt dispare din diagramă. Reprezentarea Fresnel este astfel echivalentă cu reprezentarea cu ajutorul vectorilor rotitori făcută la $t = 0$. Oscilaţia rezultantă este dată de vectorul rezultant care se obţine fie cu ajutorul regulii paralelogramului, aplicată succesiv dacă sunt mai mult de doi vectori, sau cu ajutorul regulii poligonului.

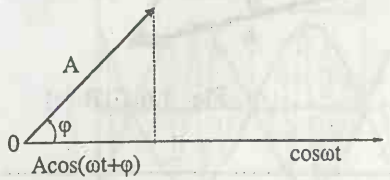


Fig. 1.6.1.1R (a)

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1. a) Din Fig. 1.6.1.1R(b) rezultă

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \\ &= \sqrt{9 + 36 + 36\left(\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \\ &= 3\sqrt{5 + \left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)} \simeq 8,93 \end{aligned}$$

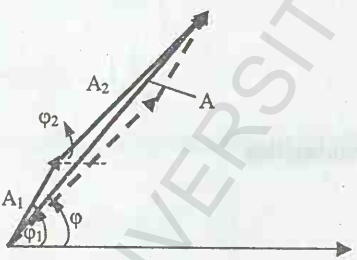


Fig. 1.6.1.1R (b)

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} = \frac{3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{3\cdot\frac{1}{2} + 6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}} \simeq 1,19$$

$$\Rightarrow \varphi \simeq 50^0 = \frac{5}{18}\pi \text{ rad}$$

b)

$$x_3(t) = 8\sin\left(15\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = 8\cos\left(15\pi t + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) = 8\cos\left(15\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$$

Conform Fig. 1.6.1.1R(c)

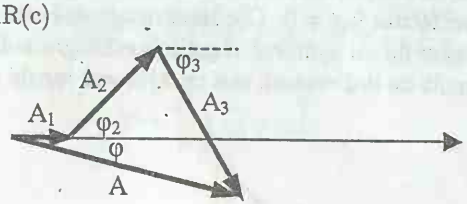


Fig. 1.6.1.1R (c)

rezultă

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(A_1 + A_2\cos\varphi_2 + A_3\cos\varphi_3)^2 + (A_2\sin\varphi_2 + A_3\sin\varphi_3)^2} \\ &= \sqrt{133 + 42\sqrt{2} - 24\sqrt{6}} \simeq 11,6 \end{aligned}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= \frac{A_2\sin\varphi_2 + A_3\sin\varphi_3}{A_1 + A_2\cos\varphi_2 + A_3\cos\varphi_3} \\ &= -\frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{7+3\sqrt{2}} = -0,24 \\ &\Rightarrow \quad \varphi = -13,4^0 \end{aligned}$$

1.6.1.2 a) $x_2(t) = 7\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) = 7\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = 7\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$

$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 9,4\cos\left(\omega t - 31,9^0\right)$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $T_b = 0$ deoarece pulsaţiile oscilaţiilor sunt egale.

b) Fie două oscilaţii cu aceeaşi amplitudine şi pulsaţii diferite. Utilizând numerele complexe, rezultatul compunerii oscilaţiilor considerate se calculează astfel

$$\begin{aligned} z &= z_1 + z_2 = A_0 e^{i(\omega_1 t+\varphi_1)} + A_0 e^{i(\omega_2 t+\varphi_2)} \\ &= A_0 e^{i\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)} \cdot \left[e^{i\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)}\right] \\ &= 2A_0\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right) e^{i\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)} \end{aligned}$$

Oscilaţia rezultantă are deci amplitudinea

$$A = 2A_0\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)$$

pulsaţia

$$\omega = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$$

şi faza iniţială

$$\varphi = \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}$$

Extrăgând partea reală, oscilaţia rezultantă se poate scrie

$$x = \Re e\,(z) = 2A_0\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)$$

Se observă că amplitudinea oscilaţiei rezultante variază periodic între valoarea zero şi $2A_0$, graficul amplitudinii constituind învelitoarea oscilaţiilor (Fig. 1.6.1.2R), acestea purtând numele de oscilaţii modulate în amplitudine.

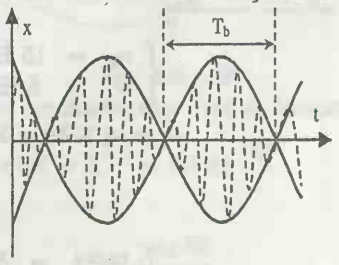


Fig. 1.6.1.2R

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Intervalul temporal dintre două zerouri succesive ale amplitudinii (sau dintre două maxime succesive) poartă numele de perioada bătăilor care se înregistrează între cele două oscilaţii

$$A = 0 \Rightarrow \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t_n + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

de unde

$$\begin{aligned} T_b &= t_{n+1} - t_n = \frac{2}{|\omega_1 - \omega_2|}\left\{[2(n+1)+1]\frac{\pi}{2} - (2n+1)\frac{\pi}{2}\right\} \\ &= \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|} \Rightarrow \omega_b = |\omega_1 - \omega_2| \end{aligned}$$

În cazul de faţă

$$T = \frac{2}{11}\ \text{s}$$

iar

$$T_b = 1\ \text{s}$$

1.6.1.3 Amplitudinea mişcării este

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\omega_2 - \omega_1)t} \\ &= \sqrt{41 + 40\cos \pi t} \in [1;9] \end{aligned}$$

iar perioada bătăilor

$$T = 2\ \text{s}$$

1.6.1.4

$$\nu = |\nu_2 - \nu_1|$$

de unde

$$\nu_2 = \nu_1 \pm \nu$$

În cazul problemei de faţă

$$\begin{cases} \nu_2 = 10 + \nu \\ \nu_2 = 20 - \nu \end{cases}$$

de unde

$$\begin{cases} \nu_2 = 15\ \text{Hz} \\ \nu = 5\ \text{Hz} \end{cases}$$

$$\nu_1' = \nu_2 \mp 3\nu = 30\ \text{Hz}$$

1.6.1.5 a) $A_0 = \frac{A}{2}$

b)

$$\begin{cases} \frac{\omega_2+\omega_1}{2} = 50 \\ \frac{\omega_2-\omega_1}{2} = 2 \end{cases}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

de unde

$$\begin{cases} \omega_1 &= 48\ \mathrm{s}^{-1} \\ \omega_2 &= 52\ \mathrm{s}^{-1} \end{cases}$$

c)

$$T_b = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\pi}{2} = 1{,}57\ \mathrm{s}$$

1.6.1.6 Metoda numerelor complexe

$$z = \sum_{m=0}^{n} Ae^{i(\omega t+\alpha+m\varphi)} = Ae^{i(\omega t+\alpha)} \sum_{m=0}^{n} e^{im\varphi} = Ae^{i(\omega t+\alpha)} \frac{e^{in\varphi}-1}{e^{i\varphi}-1}$$

$$= Ae^{i(\omega t+\alpha)} \frac{e^{i\frac{n\varphi}{2}}}{e^{i\frac{\varphi}{2}}} \frac{\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} = A\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} e^{i\left[\omega t+\alpha+(n-1)\frac{\varphi}{2}\right]}$$

de unde

$$x = \Re e\,(z) = A\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} \cos\left[\omega t + \alpha + (n-1)\frac{\varphi}{2}\right]$$

Metoda Fresnel

Aşa cum se vede din Fig. 1.6.1.6R oscilaţia rezultantă este reprezentată de linia de închidere a conturului poligonal construit cu vectorii componenţi. Vectorii componenţi sunt reprezentaţi de laturile unui poligon regulat cu $\frac{2\pi}{\varphi}$ laturi, poligon înscris în cercul cu raza

$$R = \frac{A}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$$

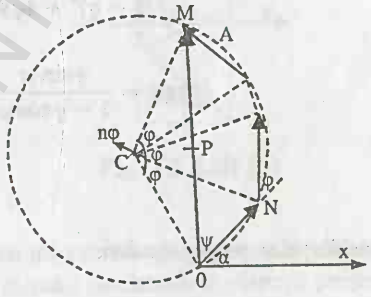


Fig. 1.6.1.6R

Cum amplitudinea oscilaţiei rezultante este dată de lungimea segmentului OM

$$OM = 2OP = 2R\sin\frac{n\varphi}{2}$$

rezultă că

$$A_r = A\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Faza oscilaţiei rezultante este $\Psi + \alpha$, unde

$$\psi = m\left(\widehat{NOM}\right) = \frac{1}{2}m\left(\widehat{NCM}\right) = (n-1)\frac{\varphi}{2}$$

Prin urmare

$$x = A\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\cos\left[\omega t + \alpha + (n-1)\frac{\varphi}{2}\right]$$

1.6.1.7

$$\begin{aligned} z &= \sum_{m=0}^{\infty} q^m A e^{i(\omega t+\alpha+m\varphi)} = A e^{i(\omega t+\alpha)} \sum_{m=0}^{\infty} q^m e^{im\varphi} \\ &= A e^{i(\omega t+\alpha)} \sum_{m=0}^{\infty} \left(q e^{i\varphi}\right)^m = A e^{i(\omega t+\alpha)} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{q^n e^{in\varphi} - 1}{q e^{i\varphi} - 1} \\ &= A e^{i(\omega t+\alpha)} \cdot \frac{1}{1 - q e^{i\varphi}} = A e^{i(\omega t+\alpha)} \cdot \frac{1 - q e^{-i\varphi}}{1 + q^2 - q\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)} \\ &= A e^{i(\omega t+\alpha)} \cdot \frac{1 - q\cos\varphi + iq\sin\varphi}{1 + q^2 - 2q\cos\varphi} \end{aligned}$$

de unde

$$\begin{aligned} x &= \Re e\,(z) = \frac{A}{1 + q^2 - 2q\cos\varphi} \cdot [(1 - q\cos\varphi)\cos(\omega t + \alpha) - q\sin\varphi\sin(\omega t + \alpha)] \\ &= A \cdot \frac{\cos(\omega t + \alpha) - q\cos(\omega t + \alpha - \varphi)}{(1-q)^2 + 4q\sin^2\frac{\varphi}{2}} = B\cos(\omega t + \alpha + \psi) \end{aligned}$$

unde

$$B = \frac{A}{\sqrt{(1-q)^2 + 4q\sin^2\frac{\varphi}{2}}}$$

iar

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{q\sin\varphi}{1 - q\cos\varphi}$$

1.6.2 Compunerea oscilaţiilor perpendiculare

1.6.2.1 a) Din enunţ

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} &= \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{6}t = -\sqrt{1 - \cos^2\frac{\pi}{6}t} \\ &= -\sqrt{1 - \frac{y^2}{4}} \end{aligned}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

de unde

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

Traiectoria particulei este o elipsă parcursă în sens trigonometric, ale cărei semiaxe sunt $a=3$, respectiv $b=2$ şi sunt paralele cu axele de coordonate [Fig. 1.6.2.1R(a)]. Deoarece sensul de mişcare al particulei coincide cu sensul de rotire al axei $0x$ peste axa $0y$ pe drumul cel mai scurt (spre stânga), oscilaţia rezultantă poartă numele de oscilaţie eliptică levogiră, sau eliptică stânga.

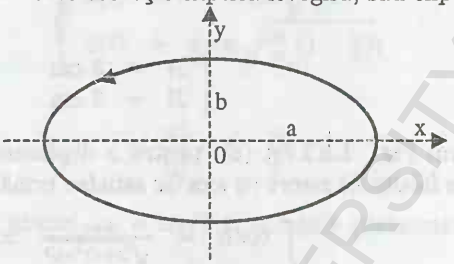


Fig. 1.6.2.1R (a)

b) Din enunţ rezultă

$$x=\sin\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}t=2\cos^2\frac{\pi}{4}t-1=\frac{y^2}{2}-1$$

Graficul traiectoriei particulei şi sensul de parcurgere al traiectoriei arată ca în Fig. 1.6.2.1R (b).

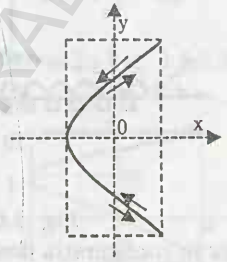


Fig. 1.6.2.1R (b)

1.6.2.2 Comparând ecuaţia din enunţ cu ecuaţia generală a traiectoriei unei particule supuse simultan la două mişcări oscilatorii în direcţii perpendiculare

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-2\frac{xy}{AB}\cos\Delta\varphi=\sin^2\Delta\varphi$$

rezultă

$$\begin{cases} A^2\sin^2\Delta\varphi &= \frac{27}{4} \\ B^2\sin^2\Delta\varphi &= 3 \\ \frac{AB\sin^2\Delta\varphi}{\cos\Delta\varphi} &= 9 \end{cases}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

de unde

$$\cos\Delta\varphi = \frac{1}{2}$$

sau

$$\Delta\varphi = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi,\ n \in Z$$

În aceste condiţii

$$\sin\Delta\varphi = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

şi deci

$$\begin{cases} A &= 3 \text{ cm} \\ B &= 2 \text{ cm} \end{cases}$$

⋆1.6.2.3 a) Conform Fig. 1.6.2.3R (a), pentru o deplasare mică oarecare a corpului, unghiurile făcute de resort cu axa $0x$ satisfac următoarele relaţii

$$\begin{cases} \cos\alpha &= \frac{b+x}{\sqrt{(b+x)^2+y^2}} &\simeq 1 \\ \cos\beta &= \frac{b-x}{\sqrt{(b-x)^2+y^2}} &\simeq 1 \end{cases}$$

şi

$$\begin{cases} \sin\alpha &= \frac{y}{\sqrt{(b+x)^2+y^2}} &\simeq \frac{y}{b} \\ \sin\beta &= \frac{y}{\sqrt{(b-x)^2+y^2}} &\simeq \frac{y}{b} \end{cases}$$

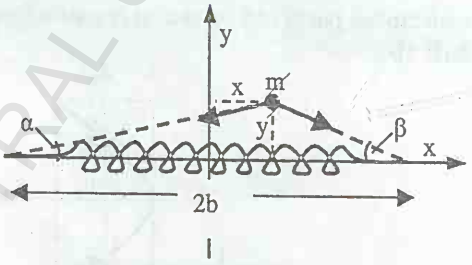


Fig. 1.6.2.3R (a)

Alungirile resorturilor în configuraţia desenată sunt

$$\begin{cases} \Delta l_1 &= \sqrt{(b+x)^2+y^2} - a &\simeq b-a+x \\ \Delta l_2 &= \sqrt{(b-x)^2+y^2} - a &\simeq b-a-x \end{cases}$$

Cum cele două jumătăţi de resort au fiecare constanta elastică $2k$, ecuaţiile de mişcare ale corpului pe cele două direcţii perpendiculare se scriu

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= 2k\Delta l_2\cos\beta - 2k\Delta l_1\cos\beta &\simeq -4kx \\ m\ddot{y} &= -2k\Delta l_2\sin\beta - 2k\Delta l_1\sin\beta &\simeq -4k\left(1-\frac{a}{b}\right)y \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{4k}{m}x &= 0 \\ \ddot{y} + \frac{4k}{m}\left(1-\frac{a}{b}\right)x &= 0 \end{cases}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

având soluţiile

$$\begin{cases} x(t) &= A\cos\left(\sqrt{\frac{4k}{m}}t+\varphi_1\right) \\ y(t) &= B\cos\left[\sqrt{\frac{4k}{m}\left(1-\frac{a}{b}\right)}t+\varphi_2\right] \end{cases}$$

Deoarece la $t=0: x=y=c$ şi $\dot{x}=\dot{y}=0$, soluţiile de mai sus se rescriu

$$\begin{cases} x(t) &= c\cos\sqrt{\frac{4k}{m}}t \\ y(t) &= c\cos\sqrt{\frac{4k}{m}\left(1-\frac{a}{b}\right)}t \end{cases}$$

Se vede de aici că

$$\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}=1-\frac{a}{b}$$

b) Dacă $b=9a/8$ atunci $\omega_2=\omega_1/3$ şi ecuaţiile parametrice de mişcare ale corpului sunt

$$\begin{cases} x(t) &= c\cos 3\omega_2 t \\ y(t) &= c\cos\omega_2 t \end{cases}$$

Deoarece

$$\cos 3\omega_2 t = 4\cos^3\omega_2 t - 3\cos\omega_2 t$$

Ecuaţia traiectoriei corpului este

$$x=4\frac{y^3}{c^2}-3y$$

iar reprezentarea ei grafică arată ca în Fig. 1.6.2.3R (b).

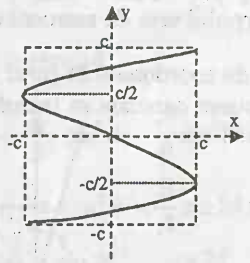


Fig. 1.6.2.3R (b)

⋆1.6.2.4 Ecuaţia traiectoriei corpului este

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$$

Vectorul de poziţie al corpului este

$$\vec{r}=x\hat{x}+y\hat{y}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

iar viteza acestuia

$$\overrightarrow{v} = -\omega\frac{AB}{B^2}y\widehat{x} + \omega\frac{AB}{A^2}x\widehat{y}$$

În aceste condiţii momentul cinetic al corpului se scrie

$$\begin{aligned}\overrightarrow{L} &= m\overrightarrow{r}\times\overrightarrow{v} = m\omega AB\cdot\begin{vmatrix}\widehat{x} & \widehat{y} & \widehat{z}\\ x & y & 0\\ \frac{y}{B^2} & \frac{x}{A^2} & 0\end{vmatrix}\\ &= m\omega AB\left(\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}\right)\widehat{z} = m\omega AB\widehat{z}\end{aligned}$$

Se vede de aici că momentul cinetic al corpului este o constantă a mişcării.

Energia cinetică a corpului este

$$E_c = \frac{1}{2}m\overrightarrow{v}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2\frac{y^2}{B^2}+B^2\frac{x^2}{A^2}\right)$$

iar energia potenţială

$$E_p = \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2+y^2\right)$$

de unde

$$\begin{aligned}E &= E_c+E_p = \frac{1}{2}m\omega^2\left[x^2\left(\frac{B^2}{A^2}+1\right)+y^2\left(\frac{A^2}{B^2}+1\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2+B^2\right)\left(\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}\right) = \frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2+B^2\right)\end{aligned}$$

Energia totală a corpului este de asemenea o integrală primă a mişcării.

⋆1.6.2.5 Prin rotirea axelor de coordonate în jurul originii cu unghiul θ (Fig. 1.6.2.5R) coordonatele unui punct oarecare se transformă astfel

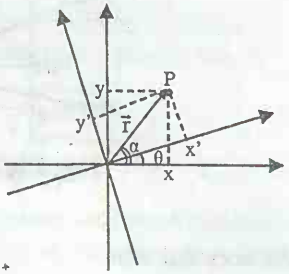


Fig. 1.6.2.5R

$$\begin{cases} x' &= r\cos(\alpha-\theta)\\ y' &= r\sin(\alpha-\theta)\end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} x' &= r\cos\alpha\cos\theta + r\sin\alpha\sin\theta &= x\cos\theta + y\sin\theta\\ y' &= r\sin\alpha\cos\theta - r\cos\alpha\sin\theta &= y\cos\theta - x\sin\theta\end{cases}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Ecuaţiile de mai sus se pot scrie sub formă matriceală astfel

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Matricea

$$\Re = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

este cunoscută sub denumirea de matricea de rotaţie a coordonatelor şi, după cum se vede, are determinantul egal cu unitatea, ceea ce nu înseamnă altceva decât că modulul vectorului de poziţie în cele două sisteme de coordonate este acelaşi.

Pentru $\theta = 30^0$ şi $x = y = 1$, noile coordonate ale punctului sunt

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{pmatrix} \text{ (m)}$$

⋆1.6.2.6 În sistemul de axe de coordonate $x0y$ ecuaţia elipsei este

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2\frac{xy}{AB}\cos\Delta\varphi = \sin^2\Delta\varphi$$

Legătura dintre coordonatele (x, y) şi (x', y') este

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Înlocuind x şi y în prima ecuaţie rezultă

$$\begin{aligned} &\frac{x'^2}{A^2}\left(\cos^2\theta + \frac{A^2}{B^2}\sin^2\theta - \frac{A}{B}\sin 2\theta\cos\Delta\varphi\right) + \\ &\frac{y'^2}{B^2}\left(\frac{B^2}{A^2}\sin^2\theta + \cos^2\theta + \frac{B}{A}\sin 2\theta\cos\Delta\varphi\right) + \\ &x'y'\left(-\frac{\sin 2\theta}{A^2} + \frac{\sin 2\theta}{B^2} - 2\frac{\cos 2\theta}{AB}\cos\Delta\varphi\right) \\ = \ &\sin^2\Delta\varphi \end{aligned}$$

Deoarece această ecuaţie trebuie să aibă forma canonică, coeficientul lui $x'y'$ trebuie să fie identic nul

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2AB}{A^2 - B^2}\cos\Delta\varphi$$

adică tocmai relaţia din enunţ.

BCU IAŞI / CENTRALA UNIVERSITARĂ LIBRARY

1.6.2.7 a) $x^2 + y^2 = A^2$; $E_c = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$

b) Traiectoria şi energia cinetică sunt aceleaşi, singura deosebire fiind sensul de parcurgere al traiectoriei: în primul caz traiectoria este parcursă în sens trigonometric (oscilaţie circulară stânga sau levogiră), iar în al doilea caz traiectoria este parcursă în sensul acelor de ceasornic (oscilaţie circulară dreapta sau dextrogiră).

1.6.2.8 a) cerc cu raza A parcurs în sens trigonometric

b) cerc cu raza A parcurs în sensul acelor de ceasornic

1.6.2.9 $x_1 = A\cos\omega t$, $y_1 = A\sin\omega t$, iar $x_2 = A\cos\omega t$, $y_2 = -A\sin\omega t$. de aici se vede că $x = 2A\cos\omega t$ şi $y = 0$. prin urmare, prin compunerea a două mişcări circulare cu acceaşi amplitudine şi frecvenţă, parcurse în sensuri opuse se obţine o oscilaţie liniară cu aceeaşi frecvenţă şi amplitudine dublă.

1.7 Analiza Fourier

1.7.1

$$\begin{aligned} x(t) &= 20\sin^2 2\pi t\cos 4\pi t = 20\frac{1-\cos 4\pi t}{2}\cos 4\pi t \\ &= 10\cos 4\pi t - 10\cos^2 4\pi t = 10\cos 4\pi t - 5\left(1+\cos 8\pi t\right) \\ &= -5 + 10\cos\left(2\pi\cdot 2\right)t - 5\cos\left(2\pi\cdot 4\right)t \end{aligned}$$

Spectrul unei oscilaţii compuse este reprezentarea grafică a amplitudinilor oscilaţiilor simple componente în funcţie de frecvenţă: $A = A(\nu)$. În acest caz spectrul arată ca în Fig. 1.7.1R.

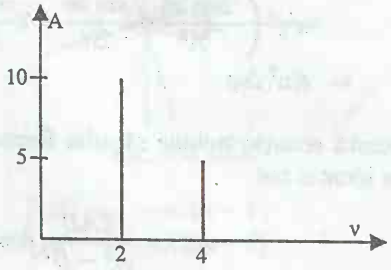


Fig. 1.7.1R

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

⋆1.7.2 Două funcţii reale $f(x)$ şi $g(x)$ sunt ortogonale pe intervalul $[a,b]$ dacă integrala produsului lor pe acest interval este nulă

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = 0$$

a)

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \cos m\omega t \cos n\omega t dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T \left[\cos(m+n)\omega t + \cos(m-n)\omega t\right] dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(m+n)\omega}\sin(m+n)\omega t\Big|_0^T + \int_0^T \cos(m-n)\omega t dt\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[0 + \delta_{mn} T\right] = \delta_{mn}\frac{T}{2}
\end{aligned}$$

unde

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & , \text{ dacă } m = n \\ 0 & , \text{ dacă } m \neq n \end{cases}$$

este simbolul lui Kronecker. Prin urmare, dacă $m \neq n$

$$\int_0^T \cos m\omega t \cos n\omega t dt = 0$$

b)

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \sin m\omega t \sin n\omega t dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T \left[\cos(m-n)\omega t - \cos(m+n)\omega t\right] dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_0^T \cos(m-n)\omega t dt - \frac{1}{(m+n)\omega}\sin(m+n)\omega t\Big|_0^T\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\delta_{mn} T - 0\right] = \delta_{mn}\frac{T}{2}
\end{aligned}$$

Dacă $m \neq n$

$$\int_0^T \sin m\omega t \sin n\omega t dt = 0$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

c)

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \sin m\omega t \cos n\omega t dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T [\sin(m-n)\omega t + \sin(m+n)\omega t]\, dt \\
&= -\frac{1}{2}[\frac{1}{(m-n)\omega}\cos(m-n)\omega t|_0^T \\
&\quad + \frac{1}{(m+n)\omega}\cos(m+n)\omega t|_0^T \\
&= 0
\end{aligned}$$

⋆1.7.3 Pentru a afla coeficienţii a_n se înmulţeşte funcţia $f(t)$ cu $\cos m\omega t$ şi se integrează rezultatul pe intervalul $[0,T]$:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T f(t)\cos m\omega t \cdot dt \\
&= A\int_0^T \cos m\omega t \cdot dt + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)\cos m\omega t \cdot dt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_{mn}\frac{T}{2} = a_m\frac{T}{2}
\end{aligned}$$

de unde

$$a_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos m\omega t \cdot dt$$

Analog

$$b_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin m\omega t \cdot dt$$

Din aceste formule se observă că dacă $m = 0$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\, dt = 2\langle f(t)\rangle$$

$$b_0 = 0$$

Pe de altă parte, integrând $f(t)$ pe intervalul $[0,T]$ rezultă

$$\int_0^T f(t)\, dt = AT \Rightarrow A = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt = \langle f(t)\rangle$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

adică tocmai valoarea medie a funcţiei.

Prin urmare, dezvoltarea funcţiei se scrie

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

⋆1.7.4 a)

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega t \cdot dt = \frac{2}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(t)\sin n\omega t \cdot dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega t \cdot dt\right] \\ &= \frac{2}{T}\left[-\int_{0}^{-\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega t \cdot dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega t \cdot dt\right] \\ &= \frac{2}{T}\left[-\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(-t)\sin n\omega t \cdot dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega t \cdot dt\right] \\ &= \frac{2}{T}\left[-\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega t \cdot dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega t \cdot dt\right] = 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t \cdot dt = \frac{2}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(t)\cos n\omega t \cdot dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t \cdot dt\right] \\ &= \frac{2}{T}\left[-\int_{0}^{-\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t \cdot dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t \cdot dt\right] \\ &= \frac{2}{T}\left[\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(-t)\cos n\omega t \cdot dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t \cdot dt\right] \\ &= \frac{2}{T}\left[-\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t \cdot dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t \cdot dt\right] = 0 \end{aligned}$$

1.7.5 a)

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi n}{L}x + b_n \sin\frac{2\pi n}{L}x\right)$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L Ax\,(L-x)\,dx = \frac{AL^2}{3}$$

şi

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L Ax\,(L-x)\sin n\frac{2\pi}{L}x\cdot dx = 0$$

Deci

$$y\,(x) = \frac{AL^2}{6} - A\frac{L^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{2\pi n}{L}x = \frac{AL^2}{6}\left(1 - \frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{2\pi n}{L}x\right)$$

b)

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L A\sin\frac{\pi x}{L}dx = \frac{4A}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L A\sin\frac{\pi x}{L}\cos n\frac{2\pi}{L}x\cdot dx = \frac{8A}{\pi}\frac{n}{4n^2-1}$$

şi

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L A\sin\frac{\pi x}{L}\sin n\frac{2\pi}{L}x\cdot dx = 0$$

de unde

$$y\,(x) = \frac{4A}{\pi} + \frac{8A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}\cos\frac{2\pi n}{L}x = \frac{4A}{\pi}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{4n^2-1}\cos\frac{2\pi n}{L}x\right)$$

c)

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^{L/2} A\sin\frac{2\pi x}{L}dx = \frac{2A}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^{L/2} A\sin\frac{2\pi x}{L}\cos\frac{2\pi n x}{L}dx = \frac{2An}{\pi\,(n^2-1)}\left[(-1)^n + 1\right],\ n \neq 1$$

Pentru $n = 1$

$$a_1 = 0$$

În general, pentru $n = 2p+1$, $p \in N$

$$a_{2p+1} = 0$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

iar pentru $n = 2p$

$$a_{2p} = \frac{4A}{\pi} \frac{2p}{(2p)^2 - 1}$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^{L/2} A \sin \frac{2\pi x}{L} \sin \frac{2\pi n x}{L} dx = 0, \; n \neq 1$$

pentru $n = 1$

$$b_1 = \frac{A}{2}$$

de unde

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2} \sin \frac{2\pi x}{L} + \frac{4A}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2p}{(2p)^2 - 1} \cos \frac{4\pi p}{L} x \\ &= \frac{A}{\pi} \left(1 + \frac{\pi}{2} \sin \frac{2\pi x}{L} + 8 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p}{4p^2 - 1} \cos \frac{4\pi p}{L} x \right) \end{aligned}$$

⋆1.7.6 a) Deoarece funcţia este impară $f(-t) = -f(t)$, dezvoltarea Fourier conţine numai termeni în sinus. Prin urmare

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \frac{2\pi n t}{T} dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin \frac{2\pi n t}{T} dt \\ &= \frac{2\pi}{T} \int_0^{T/2} \sin \frac{2\pi n t}{T} dt = \frac{1 - (-1)^n}{n} \end{aligned}$$

De aici se vede că dacă $n = 2p, p \in Z$, $b_{2p} = 0$, iar dacă $n = 2p-1$, $b_{2p+1} = \frac{2}{2p-1}$. Prin urmare

$$S(t) = 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2}{2p-1} \sin \frac{2\pi (2p-1) t}{T}$$

Deoarece funcţia din enunţ satisface condiţiile pe frontieră Dirichlet, înseamnă că seria Fourier converge către $f(t)$ în toate punctele unde f este continuă. Dacă η este un punct de discontinuitate al funcţiei $f(t)$, atunci seria Fourier $S(t)$ este legată de limitele laterale ale lui $f(t)$ în η prin relaţia

$$S(\eta) = \frac{1}{2} [f(\eta - 0) + f(\eta + 0)]$$

În cazul de faţă $\eta \in \{-\frac{T}{2}, 0, \frac{T}{2}\}$ şi $f(-\frac{T}{2} - 0) = \frac{\pi}{2}$, $f(-\frac{T}{2} + 0) = -\frac{\pi}{2}$, $f(0-0) = -\frac{\pi}{2}$, $f(0+0) = \frac{\pi}{2}$, $f(\frac{T}{2} - 0) = \frac{\pi}{2}$, $f(\frac{T}{2} + 0) = -\frac{\pi}{2}$. Prin urmare: $S(-\frac{T}{2}) = S(0) = S(\frac{T}{2}) = 0$ iar seria $S(t)$ converge în toate punctele către funcţia

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t = -\frac{T}{2} \\ -\frac{\pi}{2} & , \quad t \in (-\frac{T}{2}, 0) \\ 0 & , \quad t = 0 \\ \frac{\pi}{2} & , \quad t \in (0, \frac{T}{2}) \\ 0 & , \quad t = \frac{T}{2} \end{cases}$$

BCU "SI. ENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

b) Funcţia $f(t)$ este impară şi deci

$$a_n = 0, (\forall)\, n \in N$$

Coeficienţii b_n sunt

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}dt = \frac{8\pi\alpha}{T^2}\int_0^{T/2} t\sin\frac{2\pi nt}{T}dt = \frac{2\alpha}{n}(-1)^{n+1}$$

Prin urmare

$$S(t) = 2\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{2\pi nt}{T}$$

iar funcţia reconstruită este

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t = -\frac{T}{2} \\ \alpha\omega t & , \quad t \in \left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right) \\ 0 & , \quad t = \frac{T}{2} \end{cases}$$

c)

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^{T} f(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}dt = \frac{A}{\pi T}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^{T-\varepsilon} t\cos\frac{2\pi nt}{T}dt = 0$$

iar

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^{T} f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}dt = \frac{A}{\pi T}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^{T-\varepsilon} t\sin\frac{2\pi nt}{T}dt = -\frac{AT}{2\pi^2 n}$$

de unde

$$S(t) = -\frac{AT}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{2\pi nt}{T}$$

⋆1.7.7 Pentru ca o funcţie să admită o dezvoltare în serie Fourier care să conţină numai termeni în sinus sau numai în cosinus, intervalul de periodicitate trebuie să fie simetric faţă de origine, iar funcţia trebuie să fie impară, respectiv pară. Aşadar vom considera intervalul de periodicitate $(-2, 2)$. Pentru dezvoltarea în serie care să conţină numai termeni în sinus, extensia impară a funcţiei pe intervalul considerat este

$$f(x) = x$$

iar coeficienţii Fourier sunt

$$a_n = 0$$

şi

$$b_n = \frac{4}{4}\int_0^{2} f(x)\sin\frac{2\pi nx}{4}dx = \int_0^{2} x\sin\frac{\pi nx}{2}dx = \frac{4}{\pi n}(-1)^{n+1}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Prin urmare

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{\pi n x}{2}$$

Pentru dezvoltarea în serie care să conţină numai termeni în cosinus, extensia pară a funcţiei pe intervalul considerat este

$$f(x) = \begin{cases} -x & , \ x \in (-2, 0] \\ x & , \ x \in (0, 2) \end{cases}$$

iar coeficienţii Fourier sunt

$$a_n = \frac{4}{4} \int_0^2 f(x) \cos \frac{2\pi n x}{4} dx = \int_0^2 x \cos \frac{\pi n x}{2} dx = -\frac{4}{\pi^2 n^2} \left[1 + (-1)^{n+1}\right]$$

$$a_0 = \frac{2}{4} \int_0^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x dx = 1$$

şi

$$b_n = 0$$

Prin urmare

$$f(x) = 1 - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n+1}}{n^2} \cos \frac{\pi n x}{2}$$

1.8 Oscilaţii amortizate

1.8.1 a) $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \simeq 0,28$ s

b) $T = T_0$

c) $F_e = \mu m g = 0,49$ N, $x_0 = \frac{\mu m g}{k} = 2$ mm

d) Pentru primul semiciclu conservarea energiei se scrie

$$\frac{1}{2} k A_0^2 = \frac{1}{2} k x_1^2 + \mu m g (A_0 + x_1)$$

de unde

$$x_1 = A_0 - 2x_0$$

Spaţiul parcurs după al doilea semiciclu se găseşte analog

$$x_2 = x_1 - 2x_0 = A_0 - 2 \cdot 2x_1$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Spaţiul parcurs după cel de-al n-lea semiciclu este

$$x_n = A_0 - 2nx_0$$

Dacă $x_n = x_0$ atunci mişcarea încetează după n semicicluri

$$x_0 = A_0 - 2nx_0$$

de unde

$$n = \frac{A_0}{2x_0} - \frac{1}{2}$$

Prin urmare, numărul de oscilaţii complete efectuate de corp până la orire este

$$N = \left[\frac{n}{2}\right] = \left[\frac{A_0}{4x_0} - \frac{1}{4}\right] = [3,5] = 3$$

1.8.2 a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{K}} \simeq 0,25$ s

b) $\varphi_0 = \frac{M_f}{K} = 0,02$ rad; $\varphi_n = \varphi_{\max} - 2n\varphi_0$. Din $\varphi_n = \varphi_0 \Rightarrow n = \frac{\varphi_{\max}}{2\varphi_0} - \frac{1}{2}$ de unde $N = \left[\frac{n}{2}\right] = [6,29] = 6$

⋆1.8.3 Din grafic se observă că:

- viteza iniţială a corpului este orientată în sensul îndepărtării de poziţia de echilibru;

- corpul trece o singură dată prin poziţia de echilibru, a doua oară apropiindu-se asimptotic;

- corpul trece prin două puncte de elongaţie maximă, aflate de o parte şi de alta a poziţiei de echilibru;

- mişcarea corpului durează mai puţin de o pseudoperioadă, dar mai mult de o pseudosemiperioadă.

Mişcarea nu poate fi supraamortizată (amortizată aperiodică) sau amortizată critic deoarece în aceste cazuri viteza corpului se poate anula cel mult o singură dată. Prin urmare singurul caz posibil este cel în care mişcarea este amortizată subcritic (pseudoperiodică), dar cu $\delta \precsim \omega_0$ sau $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \simeq 0$

⋆1.8.4 Ecuaţia de mişcare a corpului este

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \delta^2 x = 0$$

Înmulţind ambii membri ai ecuaţiei cu $e^{\delta t}$ rezultă

$$\begin{aligned}
\ddot{x}e^{\delta t} + 2\delta\dot{x}e^{\delta t} + \delta^2 x e^{\delta t} &= 0 \Rightarrow \\
\left(\ddot{x}e^{\delta t} + \delta\dot{x}e^{\delta t}\right) + \delta\left(\dot{x}e^{\delta t} + \delta x e^{\delta t}\right) &= 0 \Rightarrow \\
\left(\dot{x}e^{\delta t}\right)^{\cdot} + \delta\left(xe^{\delta t}\right)^{\cdot} &= 0 \Rightarrow \\
\left(\dot{x}e^{\delta t} + \delta x e^{\delta t}\right)^{\cdot} &= 0 \Rightarrow \\
\left(xe^{\delta t}\right)^{\cdot\cdot} &= 0
\end{aligned}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

de unde

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)\, e^{-\delta t}$$

Viteza particulei este

$$v = (c_2 - \delta c_1 - \delta c_2 t)\, e^{-\delta t}$$

Pentru a fixa ideile, să presupunem că la $t = 0$, $x = x_0 > 0$. De aici rezultă că $c_1 = x_0 > 0$. Particula poate trece o dată prin poziţia de echilibru la momentul $t_1 = -\frac{c_1}{c_2} > 0$. De aici rezultă că pentru aceasta trebuie ca $c_2 < 0$. Dacă $c_2 > 0$ particula poate tinde spre poziţia de echilibru doar asimptotic. Elongaţia maximă ($v = 0$) se poate atinge o singură dată, la momentul

$$t_2 = \frac{1}{\delta} - \frac{c_1}{c_2} > 0$$

Această inegalitate este evidentă dacă $c_2 < 0$. Dacă $c_2 > 0$ inegalitatea este valabilă doar dacă $c_2 > c_1\delta$.

În concluzie:

- dacă $c_2 < 0$ particula trece o dată prin poziţia de echilibru şi atinge tot o singură dată ($t_2 > t_1$) un punct de elongaţie maximă (curba (a) din Fig. 1.8.4R).

- dacă $c_2 \in (0, c_1\delta)$ particula atinge starea de echilibru doar asimptotic, iar viteza ei scade exponenţial spre zero (curba (b) din Fig. 1.8.4R).

- dacă $c_2 > c_1\delta$ particula atinge starea de echilibru asimptotic, dar viteza acesteia se poate anula o singură dată (curba (c) din Fig. 1.8.4R).

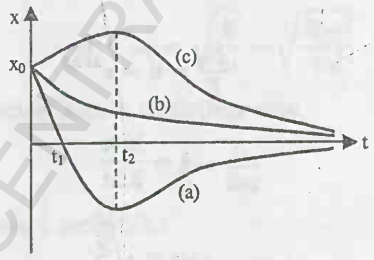


Fig. 1.8.4R

1.8.5 Apropierea de echilibru se face cel mai rapid pentru amortizarea critică:

$$\omega = 0 \Rightarrow \omega_0^2 = \delta^2$$

sau

$$\frac{k}{m} = \left(\frac{b}{2m}\right)^2$$

de unde

$$b = 2\sqrt{km}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.8.6 La amortizarea critică

$$\delta' = \omega_0$$

Pe de altă parte

$$D = \delta T = \delta \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

de unde

$$\frac{\delta'}{\delta} = \sqrt{1 + \frac{4\pi^2}{D^2}}$$

1.8.7 $b = 0,2m\sqrt{\sqrt{\frac{k}{m}} - 25 \cdot 10^{-4}} \simeq 0,4 \text{ kg/s}$

1.8.8 $\omega = \sqrt{4\pi^2\nu^2 - \left(\frac{\ln \frac{A_0}{A}}{\Delta t}\right)^2} \simeq 6,3 \text{ s}^{-1}$

1.8.9 Spaţiul parcurs de corp până la oprire este

$$\begin{aligned} s &= \lim_{n\to\infty} (A_0 + 2A_1 + ... + 2A_n) = l + 2l \lim_{n\to\infty} \left(e^{-\delta T} + e^{-2\delta T} + ... + e^{-n\delta T}\right) \\ &= l + 2l \lim_{n\to\infty} e^{-\delta T} \frac{1 - e^{-n\delta T}}{1 - e^{-\delta T}} = l + 2l \frac{e^{-\delta T}}{1 - e^{-\delta T}} = l \frac{1 + e^{-\delta T}}{1 - e^{-\delta T}} \\ &= l \frac{1 + e^{-D}}{1 - e^{-D}} = l \operatorname{cth} \frac{D}{2} \simeq 1 \text{ m} \end{aligned}$$

1.8.10

$$\frac{E_0}{E} = n = e^{2\delta \Delta t}$$

de unde

$$\delta = \frac{\ln n}{2\Delta t}$$

iar

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

deci

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{\Delta t}{\ln n} \sqrt{\frac{g}{l}} \simeq 206,1$$

1.8.11 $l = \frac{4g}{1 + \left(\frac{2\pi}{D}\right)^2} \left(\frac{\Delta t}{\ln n}\right)^2 \simeq 10 \text{ cm}$

1.8.12 a) $\delta = \frac{\ln n}{\Delta t} \simeq 0,16 \text{ s}^{-1}$

b) $D = \delta T = 0,04$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

c) $T_0 = \dfrac{T}{\sqrt{1+\left(\dfrac{D}{2\pi}\right)^2}} \simeq 0,24$ s

1.8.13 a) $D = \dfrac{1}{N_0}$

b) $T = \dfrac{\sqrt{(2\pi N_0)^2+1}}{N_0\omega_0}$

c) $\delta = \dfrac{\omega_0}{\sqrt{(2\pi N_0)^2+1}}$

1.8.14 a) $\delta = \dfrac{\ln n}{\Delta t} \simeq 0,17\ \text{s}^{-1}$

b) $D = \delta T = \dfrac{\ln n}{\Delta t}\dfrac{\Delta t}{N_1} = \dfrac{\ln n}{N_1} \simeq 0,14$

c) $k = m\dfrac{(2\pi N_1)^2+(\ln n)^2}{(\Delta t)^2} \simeq 878,9$ N/m

1.8.15 a) Din utilizarea transformărilor termodinamice rezultă că forţa care acţionează asupra pistonului este cvasielastică, constanta cvasielastică fiind

$$k = \frac{2p_0S}{l}$$

Pentru ca pistonul să efectueze mici oscilaţii în jurul poziţiei de echilibru trebuie ca

$$\alpha < \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2p_0S}{ml}}$$

b) Coeficientul de amortizare a oscilaţiilor este

$$\delta = \frac{\alpha}{2m}$$

iar timpul de relaxare a oscilaţiilor

$$\tau = \frac{1}{\delta} = \frac{2m}{\alpha}$$

c) Pseudoperioada oscilaţiilor este

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2p_0S}{ml}-\left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2}}$$

iar decrementul logaritmic

$$D = \delta T = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{8mp_0S}{\alpha^2 l}-1}}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

d) Numărul de oscilaţii efectuate de piston în timpul de relaxare este

$$N = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{D} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{8mp_0S}{\alpha^2 l} - 1}$$

e) Factorul de calitate al acestui oscilator este

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{2mp_0S}{l}}$$

1.8.16

$$\overline{\frac{dQ}{dt}} = \overline{\vec{F}_r \cdot \vec{v}} = -b\overline{v^2} = -2m\delta A_0^2 e^{-2\delta}\omega_0^2\frac{T}{2}$$

Cum

$$\frac{A_0}{A} = e^{\delta N_1 T}$$

rezultă

$$\overline{\frac{dQ}{dt}} = -\frac{kA_0^2}{N_1}\ln\frac{A_0}{A}\cdot\left(\frac{A_0}{A}\right)^{-\frac{2}{\sqrt{\frac{m}{k}\left[\left(\ln\frac{A}{A_0}\right)^2 + (2\pi N_1)^2\right]}}} \simeq 8,6\cdot 10^{-2}\ \text{W}$$

1.8.17 a) $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I}} = 0,05\ \text{s}^{-1}$

b) $\delta = \omega_0\frac{\sqrt{n^2-1}}{n} \simeq 0,02\ \text{s}^{-1}$

⋆1.8.18 a) Tensiunea din resort la distanţa x de capătul suspendat este

$$T = mg\left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

unde l este lungimea resortului.

Alungirea unui segment de resort cu lungimea dx, aflat la distanţa x de punctul de suspensie este dată de lagea lui Hooke

$$\frac{T}{S} = E\frac{d\xi}{dx}$$

de unde

$$\Delta l = \int_0^{\Delta l} d\xi = \frac{mg}{ES}\int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right)dx = \frac{mg}{ES}\frac{l}{2} = \frac{mg}{2k}$$

astfel încât

$$k = \frac{mg}{2\Delta l} = 12,5\ \text{N/m}$$

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

b) $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\Delta l}{3g}} \simeq 0,03$ s

c) $T = \frac{2\pi T_0 \tau}{\sqrt{4\pi^2\tau^2 - T_0^2}} \simeq 0,04$ s

d) $Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \pi\frac{\tau}{T_0} \simeq 523,6$

e) $D = \delta T = \frac{T}{\tau} \simeq 0,008$

1.9 Oscilaţii forţate

⋆1.9.1 Da, dacă forţa de 1N se aplică periodic asupra uşii, astfel încât perioada proprie de oscilaţie a uşii să coincidă cu intervalul de timp dintre două acţiuni succesive ale forţei de 1N asupra acesteia.

1.9.2 Dacă se închide cutia cu ajutorul difuzorului, aerul din cutie va oscila împreună cu difuzorul. Constanta elastică echivalentă a difuzorului este

$$k = m\left(2\pi\nu_0\right)^2$$

Pentru a afla constanta elastică echivalentă a volumului de gaz închis în cutie, se va ţine cont că temperatura aerului din cutie este constantă

$$p_0 V = \left(p_0 - \Delta p\right)\left(V + Sx\right)$$

de unde rezută că forţa de presiune este

$$F_1 = S\Delta p = \frac{p_0 S^2}{V} x = k_1 x$$

unde

$$k_1 = \frac{p_0 S^2}{V}$$

este constanta elastică echivalentă a volumului de gaz. Forţa totală care acţionează asupra difuzorului este

$$F = \left(k + k_1\right) x$$

de unde noua frecvenţă de rezonanţă a difuzorului

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k + k_1}{m}} = \sqrt{\nu_0^2 + \frac{p_0}{mV}\left(\frac{S}{2\pi}\right)^2} = 100 \text{ Hz}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.9.3 Ecuaţia de mişcare a corpului este

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m}$$

unde

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Ecuaţia de mai sus se poate scrie

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \left(x - \frac{F}{m\omega_0^2} \right) = 0$$

sau

$$\left(x - \frac{F}{m\omega_0^2} \right)^{\cdot\cdot} + \omega_0^2 \left(x - \frac{F}{m\omega_0^2} \right) = 0$$

iar soluţia este

$$x(t) - \frac{F}{m\omega_0^2} = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Condiţiile iniţiale fiind $x = 0$ şi $\dot{x} = 0$, la $t = 0$, rezultă $\varphi = 0$ şi $A = -\frac{F}{m\omega_0^2}$ şi deci

$$x(t) = \frac{F}{k}(1 - \cos\omega_0 t)$$

1.9.4 Pentru $t < \tau$, soluţia ecuaţiei de mişcare este cea de la problema precedentă

$$x(t) = \frac{F}{k}(1 - \cos\omega_0 t)$$

Pentru $t > \tau$, soluţia ecuaţiei de mişcare este

$$x(t) = B \cos[\omega_0 (t - \tau) + \alpha]$$

Constanele B şi α se determină din condiţia de continuitate a elongaţiei şi vitezei la $t = \tau$, de unde

$$\mathrm{tg}\alpha = -\frac{\sin\omega_0\tau}{1 - \cos\omega_0\tau} = -\mathrm{ctg}\frac{\omega_0\tau}{2} = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\omega_0\tau}{2}\right)$$

de unde

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\omega_0\tau}{2}$$

şi

$$B = 2\frac{F}{k}\left|\sin\frac{\omega_0\tau}{2}\right|$$

Valoarea maximă a amplitudinii se obţine dacă

$$\sin\frac{\omega_0\tau}{2} = \pm 1 \Rightarrow \tau = (2n+1)\frac{T_0}{2},\ n \in \aleph$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi are valoarea

$$B = \frac{2F}{k}$$

În concluzie, soluţia ecuaţiei de mişcare este

$$x(t) = 2\frac{F}{k}\left|\sin\frac{\omega_0\tau}{2}\right|\cos\left[\omega_0\left(t-\frac{\tau}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right] = -2\frac{F}{k}\left|\sin\frac{\omega_0\tau}{2}\right|\sin\omega_0\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$$

1.9.5 Ecuaţia de mişcare a corpului este

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha t$$

a cărei soluţie este de forma

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + Bt$$

Înlocuind soluţia în ecuaţie rezultă că

$$B = \frac{\alpha}{\omega_0^2}$$

iar constantele A şi φ se determină din condiţiile iniţiale: la $t = 0$, $x = 0$ şi $\dot{x} = 0 : \varphi = \frac{\pi}{2}$ şi $A = \frac{\alpha}{\omega_0^3}$. Prin urmare, soluţia ecuaţiei de mişcare este

$$x(t) = \frac{\alpha}{\omega_0^3}(\omega_0 t - \cos\omega_0 t)$$

Se observă că poziţia de echilibru se deplasează continuu, ducând în final la ruperea resortului.

1.9.6 a) Pentru $t < \tau$ ecuaţia de mişcare a corpului este

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F}{m}\sin\frac{\pi}{\tau}t$$

a cărei soluţie este

$$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha\right) + B\sin\left(\frac{\pi}{\tau}t + \beta\right)$$

Înlocuind soluţia în ecuaţia de mişcare rezultă

$$B = \frac{F}{k - m\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2}$$

şi

$$\beta = 0$$

Cum iniţial corpul era în echilibru

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi

$$A = \frac{\pi}{\tau}\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{F}{k - m\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2}$$

Prin urmare, soluţia ecuaţiei de mişcare este

$$x(t) = \frac{F}{k - m\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2}\left(-\frac{\pi}{\tau}\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + \sin\frac{\pi}{\tau}t\right)$$

Pentru $t > \tau$, soluţia ecuaţiei de mişcare este

$$x(t) = C\cos\left[\sqrt{\frac{k}{m}}(t-\tau) + \delta\right]$$

Constantele C şi δ se determină din condiţia de continuitate a elongaţiei şi vitezei la $t = \tau$

$$\delta = \frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{k}{m}}\frac{\tau}{2}$$

şi

$$C = 2\frac{\pi}{\tau}\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{F}{k - m\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2}\left|\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\frac{\tau}{2}\right| = \pi\frac{k}{m}\frac{F}{k - m\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2}\left|\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\frac{\tau}{4}\right|\frac{\left|\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\frac{\tau}{4}\right|}{\sqrt{\frac{k}{m}}\frac{\tau}{4}}$$

În concluzie

$$x(t) = -2\frac{\pi}{\tau}\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{F}{k - m\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2}\left|\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\frac{\tau}{2}\right| \cdot \sin\sqrt{\frac{k}{m}}\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

b)

$$C = 2\frac{\pi}{\tau}\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{F}{k - m\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2}\left|\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\frac{\tau}{2}\right| = \frac{2F}{\frac{\tau}{\pi}k + \sqrt{km}}\frac{\left|\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\frac{\tau}{2}\right|}{\sqrt{\frac{k}{m}} - \frac{\pi}{\tau}}$$

Amplitudinea este maximă când numitorul se anulează, adică

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{m}{k}} \equiv \frac{T}{2}$$

Prin urmare

$$C_{\max} = \lim_{\tau \to \pi\sqrt{\frac{m}{k}}} C = \frac{2F}{\frac{\tau}{\pi}k + \sqrt{km}} \lim_{\tau \to \pi\sqrt{\frac{m}{k}}} \frac{\left|\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\frac{\tau}{2}\right|}{\sqrt{\frac{k}{m}} - \frac{\pi}{\tau}} = \frac{\pi}{2}\frac{F}{k}$$

Observaţie: În toate cazurile studiate până acum, amplitudinea oscilaţiilor este maximă dacă acţiunea excitaţiei externe durează un timp egal cu jumătate din perioada proprie de oscilaţie a oscilatorului considerat.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.9.7 Ecuaţia de mişcare a corpului este

$$m\ddot{x} = mg - k(x_0 + x - x_1)$$

unde

$$kx_0 = mg$$

iar

$$x_1 = A\cos\omega t$$

Prin urmare

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}A\cos\omega t$$

a cărei soluţie este

$$x(t) = B\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha\right) + C\cos(\omega t + \beta)$$

Introducând soluţia în ecuaţia de mişcare rezultă

$$\beta = 0$$

şi

$$C = \frac{A}{1 - \frac{m}{k}\omega^2}$$

Constantele B şi α pot fi determinate numai dacă se cunosc elongaţia şi viteza la un moment dat.

Prin urmare, diferenţa de fază dintre oscilaţiile forţate (descrise de ultimul termen al legii de mişcare) este nulă, iar amplitudinea oscilaţiilor forţate este cea dată mai sus.

1.9.8 a) Rezonanţa se produce dacă perioada proprie de vibraţie a remorcii coincide cu timpul în care remorca parcurge distanţa dintre două minime sau maxime consecutive corespunzătoare denivelărilor drumului

$$v = \frac{d}{2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}} = \frac{8\sqrt{2}}{3\pi} \simeq 1{,}2 \text{ s}$$

b) Dacă viteza remorcii este v, atunci perioada excitaţiei externe este

$$T = \frac{d}{v} = 0{,}96 \text{ s}$$

Ecuaţia de mişcare a remorcii este

$$\ddot{y} + \frac{2k}{m}y = \frac{2k}{m}A\cos\omega t$$

unde

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \simeq 6{,}54 \text{ s}^{-1}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

iar

$$A = 0,05 \text{ m}$$

Soluţia particulară a ecuaţiei de mai sus, corespunzătore oscilaţiilor forţate ale remorcii este

$$y(t) = B\cos(\omega t + \alpha)$$

unde

$$\alpha = 0$$

iar

$$B = \frac{A}{1 - \frac{m}{2k}\omega^2} \simeq 4,53 \text{ mm}$$

1.9.9 a) La echilibru rezultanta forţelor este nulă în sistemul de referinţă neinerţial legat de corp

$$kx_1 = m\omega^2(x_0 + x_1)$$

de unde

$$x_1 = \frac{x_0}{\frac{k}{m\omega^2} - 1}$$

b) Dacă $\omega^2 = \omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}$, resortul se alungeşte până se rupe, neexistând vreo poziţie de echilibru.

1.9.10 a) Amplitudinea oscilaţiilor forţate ale instrumentului este

$$B = \frac{A}{\left|1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right|}$$

unde A este amplitudinea de vibraţie a tavanului, iar

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Din enunţ

$$\frac{A}{B} = n$$

de unde

$$k = \frac{G\omega^2}{g(n+1)} = 20 \text{ kN/m}$$

b)

$$a_{\max} = \ddot{y} = -\omega^2 B = \frac{\omega^2 A}{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1} = \frac{\omega^2 A}{n} = 3 \text{ m/s}^2$$

şi

$$F_{\max} = ma_{\max} = 12 \text{ N}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.9.11 Sistemul strung+cauciuc joacă rolul de pendul elastic forţat să oscileze cu frecvenţa $\nu = 600$ Hz. Frecvenţa proprie de oscilaţie a acestui pendul este

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M+\frac{m}{3}}}$$

unde

$$m = \alpha h$$

este masa covorului, iar

$$k = \frac{ES}{h}$$

este constanta elastică echivalentă a sa.

Prin urmare

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3ES}{3Mh+\alpha h^2}}$$

Raportul dintre amplitudinea de oscilaţie forţată a sistemului (în cazul de faţă tocmai amplitudinea de vibraţie a planşeului) şi amplitudinea forţei externe, numit coeficient de transmisie, este

$$T = \frac{B}{A} = \frac{1}{\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2 - 1}$$

Deoarece enunţul cere ca $T < 1$, rezultă

$$\alpha h^2 + 3Mh - \frac{3ES}{2\pi^2\nu^2} > 0$$

de unde

$$\begin{aligned} h &> \frac{3M}{2\alpha}\left(\sqrt{1+\frac{2ES\alpha}{3(\pi\nu M)^2}} - 1\right) \\ &\simeq \frac{3M}{2\alpha}\left[\left(1+\frac{ES\alpha}{3(\pi\nu M)^2}\right) - 1\right] \\ &= \frac{ES}{2M(\pi\nu)^2} \simeq 44{,}3 \text{ cm} \end{aligned}$$

⋆1.9.12 Ecuaţia de mişcare a corpului cu masa m este

$$m\vec{a} = \vec{F}_e + \vec{F}_r + \vec{F}(t)$$

unde

$$\vec{a} = m\ddot{x}\hat{x}$$

este acceleraţia corpului,

$$\vec{F}_e = -kx\hat{x}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

este forţa de tip elastic,

$$\overrightarrow{F}_r = -r\dot{x}\widehat{x}$$

este forţa de rezistenţă, r fiind coeficientul de rezistanţă, iar

$$\overrightarrow{F}(t) = F_0 \cos(\Omega t)\,\widehat{x}$$

este forţa de excitaţie externă. Prin urmare, ecuaţia de mişcare se rescrie

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_0 \cos(\Omega t)$$

sau, ţinând cont că

$$x = \Re e\,(z)$$

şi notând

$$\begin{cases} 2\delta &= \frac{r}{m} \\ \omega_0^2 &= \frac{k}{m} \\ f_0 &= \frac{F_0}{m} \end{cases}$$

ecuaţia de mai sus devine

$$\ddot{z} + 2\delta\dot{z} + \omega_0^2 z = f_0 e^{i\Omega t}$$

Soluţia generală a acestei ecuaţii este suma dintre soluţia ecuaţiei omogene şi soluţia particulară de forma termenului liber. Soluţia ecuaţiei omogene este în fapt soluţia ecuaţiei oscilatorului amortizat care se "stinge" în timp. După timpul de tranzit, soluţia generală va coincide cu soluţia particulară

$$z(t) = Be^{i\Omega t}$$

Introducând această soluţie în ecuaţia de mişcare rezultă

$$\begin{aligned} f_0 e^{i\Omega t} &= \left(-\Omega^2 + 2i\delta\Omega + \omega_0^2\right) Be^{i\Omega t} \Rightarrow \\ B &= \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\delta\Omega} \\ &= \frac{f_0}{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + (2\delta\Omega)^2}\left[\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right) - i\cdot 2\delta\Omega\right] \\ &= \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + (2\delta\Omega)^2}} \frac{\left[\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right) - i\cdot 2\delta\Omega\right]}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + (2\delta\Omega)^2}} \\ &\equiv \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + (2\delta\Omega)^2}} e^{-i\varphi} \end{aligned}$$

unde

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

Prin urmare

$$z(t) = A(\Omega)\cdot e^{i(\Omega t - \varphi)}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde amplitudinea oscilaţiilor forţate va depinde de pulsaţia forţei excitatoare

$$A(\Omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}}$$

Se observă de aici că oscilaţiile întârzie faţă de forţa externă, deoarece faza oscilaţiei este totdeauna în urma fazei forţei externe. Într-adevăr, crescându-l progresiv pe Ω se obţin situaţiile:

$\Omega \ll \omega_0 \Rightarrow \text{tg}\varphi \to 0 \Rightarrow \varphi \to 0$

$\Omega \simeq \omega_0 \Rightarrow \text{tg}\varphi \to \infty \Rightarrow \varphi \to \frac{\pi}{2}$

$\Omega \gg \omega_0 \Rightarrow \text{tg}\varphi \to 0 \Rightarrow \varphi \to \pi$

Graficul defazajului arată ca în Fig. 1.9.12R.

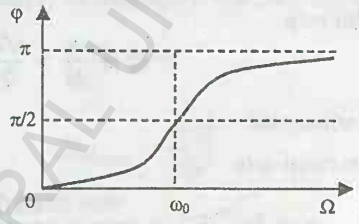


Fig. 1.9.12R

Rezumând cele discutate până aici rezultă:

- amplitudinea oscilaţiilor forţate depinde de pulsaţia forţei externe;

- pulsaţia oscilaţiilor forţate coincide cu pulsaţia forţei externe;

- oscilaţiile forţate sunt defazate în urmă faţă de forţa externă, spre deosebire de oscilaţiile forţate unde lipseşte amortizarea, care sunt în fază cu forţa externă.

- dacă pulsaţia forţei externe este egală cu pulsaţia proprie a oscilatorului, atunci oscilaţiile forţate sunt defazate în urmă cu $\frac{\pi}{2}$ faţă de forţa externă (sunt în cvadratură).

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

⋆1.9.13 Rezonanţa amplitudinilor

Amplitudinea oscilaţiilor forţate are expresia

$$A(\Omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}}$$

La rezonanţă amplitudinea oscilaţiilor este maximă. Maximul expresiei de mai sus se realizează când numitorul este minim, adică atunci când

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

iar valoarea amplitudinii la rezonanţă este

$$A_r = \frac{f_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

De aici se observă că amplitudinea tinde la infinit pentru amortizarea critică, iar pentru amortizarea supercritică rezonanţa nu se mai obţine. Mai mult, dacă $\delta > \omega_0/\sqrt{2}$ pulsaţia forţei externe devine complexă, iar rezonanţa nu se mai poate realiza (curba $A(\Omega)$ scade monoton). În concluzie, rezonanţa amplitudinilor se realizează doar dacă $\delta < \omega_0/\sqrt{2}$, sau dacă factorul de calitate al oscilatorului este

$$Q \equiv \frac{\omega_0}{2\delta} > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Rezonanţa vitezelor

Viteza oscilatorului este

$$\dot{z} = Ae^{i(\Omega t - \varphi)} = \frac{i\Omega f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}} e^{i(\Omega t - \varphi)}$$

La rezonanţa vitezelor, amplitudinea vitezei este maximă. Acest lucru se realizează când

$$\Omega_r = \omega_0$$

iar amplitudinea vitezei are expresia

$$v_{\max r} = \frac{f_0}{2\delta}$$

Se observă de aici că rezonanţa vitezelor se realizează când pulsaţia forţei externe este egală cu pulsaţia proprie a oscilatorului, iar amplitudinea vitezei oscilaţiilor forţate la rezonanţă nu depinde de pulsaţia forţei externe.

La rezonanţa vitezelor

$$\mathrm{tg}\varphi \to \infty \Rightarrow \varphi \to \frac{\pi}{2}$$

Prin urmare

$$\dot{z}_r = \frac{f_0}{2\delta} e^{i\omega_0 t}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

adică viteza oscilatorului este în fază cu forţa externă. Mai mult, raportul dintre amplitudinea oscilaţiilor la rezonanţa vitezelor şi amplitudinea "statică" este tocmai factorul de calitate al oscilatorului

$$\frac{A(v_r)}{A_{st}(\Omega=0)} = \frac{\frac{f_0}{2\delta\omega_0}}{\frac{f_0}{\omega_0^2}} = \frac{\omega_0}{2\delta} \equiv Q$$

Nu în ultimul rând, la amortizări slabe ($\delta \ll \omega_0 \Rightarrow \frac{\delta^2}{\omega_0^2} \to 0$) cele două rezonanţe coincid şi se produc la $\Omega = \omega_0$!

⋆1.9.14 Energia cinetică a oscilatorului este

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

unde

$$v = \Omega A \sin(\Omega t - \varphi)$$

Valoarea medie a acestei energii este

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{4}m\Omega^2 A^2$$

Valoarea ei maximă (rezonanţa) se realizează, aşa cum era de aşteptat, pentru

$$\Omega_r = \omega_0$$

iar

$$\langle E_c \rangle_{\max} = \frac{mf_0^2}{16\delta^2}$$

Energia potenţială a oscilatorului este

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\Omega t - \varphi)$$

Valoarea medie a acestei energii este

$$\langle E_p \rangle = \frac{1}{4}kA^2$$

Valoarea ei maximă (rezonanţa) se realizează pentru

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

iar

$$\langle E_p \rangle_{\max} = \frac{kf_0^2}{16\delta^2(\omega_0^2 - \delta^2)} = \frac{m\omega_0^2 f_0^2}{16\delta^2(\omega_0^2 - \delta^2)}$$

Energia totală medie a oscilatorului este

$$\langle E \rangle = \frac{m}{4}(\Omega^2 + \omega_0^2)A^2 = \frac{F_0^2}{4m}\frac{\omega_0^2 + \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Valoarea maximă a acestei energii se realizează pentru

$$\Omega_r = \omega_0 \sqrt{2\sqrt{1-\left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2} - 1}$$

iar valoarea ei maximă este

$$\langle E \rangle_r = \frac{F_0^2}{16k} \frac{\left(1-\frac{\delta^2}{\omega_0^2}\right)^2 - \frac{\delta^2}{\omega_0^2}\sqrt{1-\frac{\delta^2}{\omega_0^2}}}{\frac{\delta^4}{\omega_0^4} - \left(1-\frac{\delta^2}{\omega_0^2}\right)^3}$$

Dacă amortizarea este slabă

$$\Omega_r \simeq \omega_0$$

şi

$$\langle E \rangle_r = -\frac{F_0^2}{16k}$$

Pentru a analiza curba de rezonanţă trebuie evaluată anergia oscilatorului în vecinătatea rezonanţei ($\Omega \simeq \omega_0$). În aceste condiţii

$$\omega_0^2 + \Omega^2 \simeq 2\omega_0^2$$

şi

$$\omega_0^2 - \Omega^2 = (\omega_0 + \Omega)(\omega_0 - \Omega) \simeq 2\omega_0(\omega_0 - \Omega)$$

Prin urmare

$$\langle E \rangle \simeq \frac{F_0^2}{8m} \frac{1}{(\omega_0 - \Omega)^2 + \delta^2} = \frac{F_0^2}{8m} \cdot \pounds(\Omega)$$

unde

$$\pounds(\Omega) = \frac{1}{(\omega_0 - \Omega)^2 + \delta^2}$$

poartă numele de curbă de rezonanţă sau Lorenziană şi arată ca în Fig. 1.9.14R.

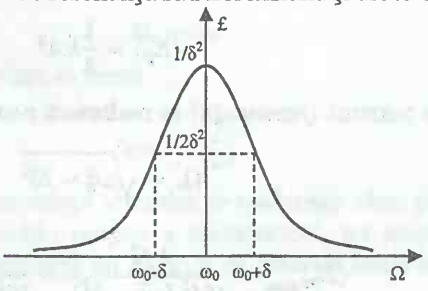


Fig. 1.9.14R

$\pounds(\Omega)$ scade la jumătate când

$$\Omega_{1,2} = \omega_0 \mp \delta$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

iar semilargimea curbei de rezonanţă este

$$\Delta\Omega_{1/2} = 2\delta = \frac{\omega_0}{Q}$$

unde

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta}$$

este factorul de calitate al oscilatorului.

Amplitudinea curbei de rezonanţă este

$$B_{\max} = \sqrt{\langle E \rangle} = \frac{F_0}{2\delta\sqrt{2m}} = \frac{F_0 Q}{\omega_0\sqrt{2m}} = \frac{F_0 Q}{\sqrt{2k}}$$

de unde

$$B_{\max} \cdot \Delta\Omega_{1/2} = \frac{F_0}{\sqrt{2m}} = const$$

⋆1.9.15 Pentru ca sistemul să se comporte la rezonanţă ca un oscilator armonic ideal ar trebui ca forţele externă şi de rezistenţă să nu-şi facă simţită prezenţa. Cu alte cuvinte, energia totală a oscilatorului să nu depindă de pulsaţia forţei externe şi să se conserve. Altfel spus, energia medie disipată în unitate de timp trebuie să fie egală cu energia medie injectată în sistem în unitatea de timp. Concret, prin înmulţirea ambilor membri ai ecuaţiei de mişcare a oscilatorului

$$m\ddot{z} + r\dot{z} + kz = F_0 e^{i\Omega t}$$

cu $\dot{z}$ rezultă

$$\left(\frac{m\dot{z}^2}{2} + \frac{kz^2}{2}\right)^{\cdot} + r\dot{z}^2 = F_0 \dot{z} e^{i\Omega t}$$

sau

$$\frac{d}{dt}\left(E_c + E_p\right) + r\dot{z}^2 = F_0 \dot{z} e^{i\Omega t}$$

În această ecuaţie

$$\frac{d}{dt}\left(E_c + E_p\right) = \frac{dE}{dt}$$

reprezintă rata de variaţie a energiei oscilatorului,

$$P_{disipat} = r\dot{z}^2 = 2\Phi$$

puterea disipată de sistem, Φ fiind aşa numita funcţie de disipare, iar

$$P_{injectat} = F_0 \dot{z} e^{i\Omega t}$$

puterea injectată în sistem.

Valorile medii ale acestor mărimi sunt

$$\langle E \rangle = \frac{m}{4}\left(\Omega^2 + \omega_0^2\right) A^2$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\langle 2\Phi \rangle = -\frac{1}{2} r \Omega^2 A^2$$

şi

$$\langle P_{injectat} \rangle = \frac{1}{2} F_0 \Omega A \sin \varphi$$

La rezonanţă ($\Omega \simeq \omega_0$)

$$A = \frac{F_0}{2m\delta\omega_0}$$

şi

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

Prin urmare

$$\langle P_{injectat} \rangle = \frac{F_0^2}{4m\delta} = \frac{F_0^2}{2r}$$

$$\langle P_{disipat} \rangle = -\frac{F_0^2}{4m\delta} = -\frac{F_0^2}{2r}$$

În concluzie

$$\langle P_{injectat} \rangle = -\langle P_{disipat} \rangle$$

şi

$$\frac{d\langle E \rangle}{dt} = 0$$

⋆1.9.16 Într-o nalogie mecano-electrică, corespondenţa mărimilor de bază este

$$\begin{cases} q & \leftrightarrow & x \\ i & \leftrightarrow & \dot{x} \\ u & \leftrightarrow & F_0 \cos \Omega t \\ R & \leftrightarrow & r \\ L & \leftrightarrow & m \\ C & \leftrightarrow & \frac{1}{k} \end{cases}$$

În aceste condiţii:

- impedanţa caracteristică a sistemului este

$$Z_0 = \sqrt{mk}$$

- factorul de calitate al oscilatorului

$$Q = \frac{1}{r}\sqrt{mk} = \frac{m\omega_0}{2m\delta} = \frac{\omega_0}{2\delta}$$

- reactanţa inerţială (inertanţa)

$$X_m = \Omega m$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

- reactanţa elastică (numită şi elastanţă sau complianţă)

$$X_k = \frac{k}{\Omega}$$

- impedanţa mecanică

$$Z = \sqrt{r^2 + (X_m - X_k)^2} = \frac{m}{\Omega}\sqrt{(2\delta\Omega)^2 + (\Omega^2 - \omega_0^2)^2}$$

- defazajul

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{X_m - X_k}{r} = -\frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{2\delta\Omega} = -\mathrm{ctg}\varphi = \mathrm{tg}\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

de unde

$$\beta = \varphi - \frac{\pi}{2}$$

În aceste circumstanţe reprezentarea fazorială arată ca în Fig. 1.9.16R.

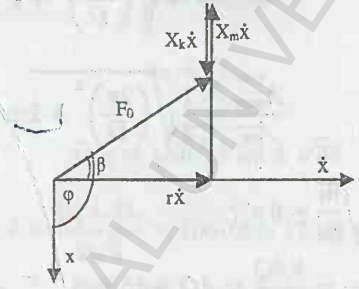


Fig. 1.9.16R

Din figură se poate deduce, spre exemplu, amplitudinea vitezei oscilatorului

$$\frac{F_0}{Z} = \Omega A \Rightarrow A = \frac{F_0}{Z\Omega}$$

1.9.17 a)

$$A_r = \frac{F_0}{2m\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

şi

$$\Omega_r^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2$$

Eliminând δ din aceste două ecuaţii rezultă

$$k = m\omega_0^2 = m\sqrt{\Omega_r^4 + \left(\frac{F_0}{mA_r}\right)^2} \simeq 475{,}6 \text{ N/m}$$

b)

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{2}(\omega_0^2 - \Omega_r^2)} \simeq 10{,}9 \text{ s}^{-1}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

c)

$$A(\Omega) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}} \simeq 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

d)

$$A(\Omega) = \frac{F_0}{m\,|\omega_0^2 - \Omega^2|} \simeq 4,1 \text{ mm}$$

1.9.18

$$\frac{A_{\max}}{A_{st}} = Q = \frac{\omega_0}{2\delta}$$

Dar

$$D = \delta T = \delta \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\delta}\right)^2 - 1}}$$

de unde

$$\frac{\omega_0}{\delta} = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{D}\right)^2 + 1}$$

Prin urmare

$$\frac{A_{\max}}{A_{st}} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{2\pi}{D}\right)^2 + 1} \simeq 1,65$$

1.9.19 a) $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{m}{y_0}} = 9 \text{ s}^{-1}$

b) $A(\Omega) = \frac{F_0}{2m\delta\omega_0} = \frac{kAQ}{m\omega_0^2} = AQ = 15 \text{ mm}$

1.9.20 a) $\Omega_r = \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} = 500 \text{ Hz}$

b) $\delta = \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2} = 100 \text{ s}^{-1}$

c) $D = \delta T = \delta \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{\Omega_1+\Omega_2}{\Omega_2-\Omega_1}\right)^2 + 1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{26}} \simeq 1,23$

d) $Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\Omega_2 + \Omega_1}{\Omega_2 - \Omega_1}\right)^2 + 2} = \frac{\sqrt{27}}{2} \simeq 2,60$

1.9.21 a) Puterea absorbită de oscilator este

$$P = F_0 e^{i\Omega t} \cdot \dot{z} = i\Omega A F_0 e^{i(2\Omega t - \varphi)} = i \frac{\Omega F_0^2}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}} e^{i(2\Omega t - \varphi)}$$

Puterea este maximă pentru

$$\Omega = \omega_0$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Dar

$$\Delta\Omega = \frac{\omega}{5} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}{5} = 2\delta$$

de unde

$$\Omega = \delta\sqrt{101} = \omega\frac{\sqrt{101}}{10} \simeq 1,005\omega$$

b)

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{\sqrt{101}}{2} \simeq 5,02$$

1.9.22 a) $\Omega_r \equiv \omega_0 = \frac{\Omega_1+\Omega_2}{2} = 700$ Hz

b)

$$v_0 = \frac{\Omega F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}}$$

de unde

$$v_{\max} = \frac{F_0}{2m\delta}$$

şi din

$$v_0 = \frac{1}{2}v_{\max}$$

rezultă

$$\Omega_{1,2} = \sqrt{3\delta^2 + \omega_0^2} \pm \sqrt{3}\delta$$

de unde

$$\delta = \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2\sqrt{3}} = 100\sqrt{3} \simeq 173,2 \ (\mathrm{s}^{-1})$$

c) $D = \delta T = \delta\dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\delta}\right)^2 - 1}} \simeq 1,62$

d) $Q = \dfrac{\omega_0}{2\delta} \simeq 2$

1.9.23 a)

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

La rezonanţa vitezelor, amplitudinea oscilaţiilor este

$$A_0 = \frac{F_0}{2m\delta\omega_0}$$

de unde

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{F_0}{2mA_0\omega_0}\right)^2} \simeq 3,1 \ \mathrm{s}^{-1}$$

b)

$$A_r = \frac{F_0}{2m\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{\omega_0 A_0}{\Omega_r} \simeq 5,03 \text{ cm}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.10 Oscilaţii cu mai multe grade de libertate

1.10.1 a) La echilibru, dacă y_{01}, respectiv y_{02} sunt alungirile celor două resorturi, atunci

$$Mg = k_1 y_{01} + k_2 y_{02}$$

şi, deoarece scripetele este în repaus

$$k_1 y_{01} R = k_2 y_{02} R$$

Prin urmare, la echilibru

$$k_1 y_{01} = k_2 y_{02} = \frac{1}{2} Mg$$

Perturbând sistemul, ecuaţia de mişcare pentru translaţia scripetelui este

$$M\ddot{y} = Mg - k_1 (y_{01} + y_1) - k_2 (y_{02} + y_2)$$

sau

$$\ddot{y} + \frac{1}{M} (k_1 y_1 + k_2 y_2) = 0$$

Deoarece

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

ecuaţia de mai sus este

$$\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 + \frac{2}{M} (k_1 y_1 + k_2 y_2) = 0 \tag{1}$$

Ecuaţia de mişcare pentru mişcarea de rotaţie a scripetelui, scrisă faţă de centrul său de masă, este

$$I\ddot{\theta} = k_1 (y_{01} + y_1) R - k_2 (y_{02} + y_2) R = k_1 y_1 R - k_2 y_2 R$$

Deoarece

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$

şi

$$\theta = \frac{y_2 - y_1}{R}$$

ecuaţia de mai sus se rescrie astfel

$$\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1 + \frac{2}{M} (k_2 y_2 - k_1 y_1) = 0 \tag{2}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Scăzând ecuaţia (2) din ecuaţia (1) rezultă

$$\ddot{y}_1 + \frac{2k_1}{M} y_1 = 0$$

Adunând ecuaţiile (1) şi (2) membru cu membru rezultă

$$\ddot{y}_2 + \frac{2k_2}{M} y_2 = 0$$

Adunând acum ultimele două ecuaţii rezultă tocmai ecuaţia pentru mişcarea de translaţie a scripetelui

$$\ddot{y} + 2\frac{k_1 + k_2}{M} y = 0$$

Pulsaţia acestui mod normal de oscilaţie este

$$\omega_1 = \sqrt{2\frac{k_1 + k_2}{M}}$$

Pentru a afla ecuaţia corespunzătoare celui de-al doilea mod normal de oscilaţie (rotaţia scripetelui în jurul centrului său de masă) se va scădea ecuaţia (3) din (4), obţinându-se

$$\ddot{\theta} + 2\frac{k_2 - k_1}{M} \theta = 0$$

Pulsaţia acestui mod normal de oscilaţie este

$$\omega_2 = \sqrt{2\frac{k_2 - k_1}{M}}$$

Se observă de aici că scripetele nu se va roti dacă $k_2 = k_1$.

b) La echilibru

$$k_2 y_{20} = mg$$

şi

$$k_1 y_{10} = Mg + 2mg$$

Perturbând sistemul, se pot scrie ecuaţiile:

- pentru translaţia corpului cu masa m, a cărui poziţie y se măsoară faţă de poziţia de echilibru

$$m\ddot{y} = mg - T$$

- pentru translaţia scripetelui

$$\begin{aligned} M\ddot{y}_1 &= Mg + T + k_2 (y_2 + y_{20}) - k_1 (y_1 + y_{10}) \\ &= T - mg + k_2 y_2 - k_1 y_1 \end{aligned}$$

- pentru rotaţia scripetelui în jurul centrului lui de masă

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} MR^2 \ddot{\theta} &= TR - k_2 (y_2 + y_{20}) R \\ &= (T - mg - k_2 y_2) R \end{aligned}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Ţinând cont că

$$y_2 = y - 2y_1$$

şi

$$\theta = \frac{y_1 + y_2}{R} = \frac{y - y_1}{R}$$

cele trei ecuaţii de mişcare de mai sus se scriu

$$\begin{cases} m\ddot{y} + T - mg & = 0 \\ M\ddot{y}_1 - T + mg + (k_1 + 2k_2)\, y_1 - k_2 y & = 0 \\ \frac{1}{2}M\ddot{y} - \frac{1}{2}M\ddot{y}_1 - T + mg + k_2 y - 2k_2 y_1 & = 0 \end{cases}$$

Tensiunea din fir se elimină adunând prima ecuaţie pe rând cu celelate două

$$\begin{cases} M\ddot{y}_1 + m\ddot{y} + (k_1 + 2k_2)\, y_1 - k_2 y & = 0 \\ -\frac{M}{2}\ddot{y}_1 + \left(m + \frac{M}{2}\right)\ddot{y} + k_2 y - 2k_2 y_1 & = 0 \end{cases}$$

Rearanjând aceste ecuaţii se obţine sistemul

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + \dfrac{k_1\,(2m+M) + 2k_2\,(4m+M)}{M\,(3m+M)} y_1 - \dfrac{k_2\,(4m+M)}{M\,(3m+M)} y & = 0 \\ \ddot{y} + \dfrac{k_2}{3m+M} y + \dfrac{k_1 - 2k_2}{3m+M} y_1 & = 0 \end{cases}$$

Căutând soluţii de forma

$$y_{1,2} \sim e^{i\omega t}$$

se obţine sistemul de ecuaţii caracteristice

$$\begin{cases} \left[-\omega^2 + \dfrac{k_1\,(2m+M) + 2k_2\,(4m+M)}{M\,(3m+M)}\right] y_1 - \dfrac{k_2\,(4m+M)}{M\,(3m+M)} y & = 0 \\ \dfrac{k_1 - 2k_2}{3m+M} y_1 + \left[-\omega^2 + \dfrac{k_2}{3m+M}\right] y & = 0 \end{cases}$$

Acest sistem de ecuaţii, fiind omogen, admite soluţii nebanale, dacă determinantul său este identic nul

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 + \dfrac{k_1\,(2m+M) + 2k_2\,(4m+M)}{M\,(3m+M)} & -\dfrac{k_2\,(4m+M)}{M\,(3m+M)} \\ \dfrac{k_1 - 2k_2}{3m+M} & -\omega^2 + \dfrac{k_2}{3m+M} \end{vmatrix} = 0$$

Această ecuaţie, numită ecuaţie secular\u0103, se scrie

$$\omega^4 - \frac{k_1\,(2m+M) + k_2\,(8m+3M)}{M\,(3m+M)}\omega^2 + \frac{2k_1 k_2}{M\,(3m+M)} = 0$$

Soluţiile acestei ecuaţii se scriu

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{k_1\,(2m+M) + k_2\,(8m+3M)}{2M\,(3m+M)} \pm \frac{\sqrt{[k_1\,(2m+M) + k_2\,(8m+3M)]^2 - 8M\,(3m+M)\,k_1 k_2}}{2M\,(3m+M)}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

c) Procedând analog ca mai sus, se găseşte ecuaţia secular㠄

$$\omega^4 - \left(2\frac{k_1+k_2}{M} + \frac{k_2}{m}\right)\omega^2 + 2\frac{k_1k_2}{mM} = 0$$

ale cărei soluţii sunt

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2}\left[2\frac{k_1+k_2}{M} + \frac{k_2}{m} \pm \left(2\frac{k_1+k_2}{M} - \frac{k_2}{m}\right)\right] = \begin{cases} 2\frac{k_1+k_2}{M} \\ \frac{k_2}{m} \end{cases}$$

sau

$$\omega_+ = \sqrt{2\frac{k_1+k_2}{M}}$$

şi

$$\omega_- = \sqrt{\frac{k_2}{m}}$$

După cum se vede, pulsaţia ω_+ corespunde oscilaţiei scripetelui în condiţiile în care corpul este fixat, iar ω_- oscilaţiilor corpului cu scripetele fixat (firul nu alunecă pe scripete).

1.10.2 Metoda modurilor normale constă în descompunerea unei oscilaţii cu n grade de libertate în n oscilaţii independente, cu câte un grad de libertate fiecare. Fiecare din cele n oscilaţii independente poartă numele de mod normal de oscilaţie, coordonata fiecărei oscilaţii - coordonată normală, iar pulsaţia fiecărei oscilaţii - pulsaţie proprie. Prin urmare, determinarea modurilor normale presupune determinarea atât a pulsaţiilor proprii, cât şi a coordonatelor normale.

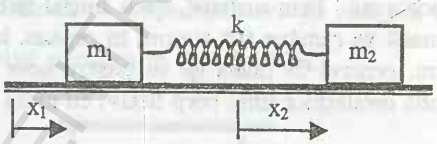


Fig. 1.10.2R

1. În cazul problemei de faţă, ţinând cont de notaţiile făcute în Fig. 1.10.2R, în care distanţele sunt măsurate faţă de poziţiile de echilibru, se pot scrie următoarele ecuaţii de mişcare

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 &= k(x_2 - x_1) \\ m_2\ddot{x}_2 &= -k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

de unde

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{k}{m_1}x_1 - \frac{k}{m_1}x_2 &= 0 \\ \ddot{x}_2 - \frac{k}{m_2}x_1 + \frac{k}{m_2}x_2 &= 0 \end{cases} \qquad (1)$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Căutând soluţii de forma

$$x_{1,2} = A_{1,2}e^{i\omega t}$$

sistemul de mai sus conduce la sistemul de ecuaţii caracteristice

$$\begin{cases} \left(-\omega^2 + \frac{k}{m_1}\right) A_1 - \frac{k}{m_1} A_2 = 0 \\ -\frac{k}{m_2} A_1 + \left(-\omega^2 + \frac{k}{m_2}\right) A_2 = 0 \end{cases}$$

Ecuaţia seculară este în acest caz

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 + \frac{k}{m_1} & -\frac{k}{m_1} \\ -\frac{k}{m_2} & -\omega^2 + \frac{k}{m_2} \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$\omega^4 - \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) k\omega^2 = 0$$

Expresia

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{\mu}$$

unde μ este masa redusă a sistemului de două corpuri considerat, iar soluţiile ecuaţiei seculare sunt

$$\begin{cases} \omega_1 = 0 \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{\mu}} \end{cases}$$

Primul mod normal corespunde mişcării sistemului ca întreg, fără a oscila, deci fără ca resortul să se deformeze. Adunând primele ecuaţii de mişcare se observă că acceleraţia centrului de masă al sistemului este nulă, adică viteza centrului de masă este constantă. Prin urmare, dacă iniţial sistemul se afla în repaus, centrul său de masă va rămâne tot timpul în repaus, iar dacă iniţial se mişca rectiliniu uniform, centrul de masă îşi va păstra acea viteză. Al doilea mod normal corespunde oscilaţiilor unui corp fictiv, cu masa egală cu masa redusă a sistemului.

Din prima ecuaţie a sistemului de ecuaţii caracteristice, în care se înlocuieşte ω cu ω_2 rezultă

$$\begin{cases} A_1 = A \\ A_2 = -\frac{m_1}{m_2} A \end{cases}$$

Din ultima ecuaţie se observă că cele două corpuri oscilează în opoziţie de fază, oscilaţiile fiind antisimetrice. Repetând acest procedeu, înlocuind de această dată pe ω cu ω_1 rezultă

$$\begin{cases} A_1' = B \\ A_2' = B \end{cases}$$

acesta fiind deci modul simetric.

Observaţie: În general modul simetric de oscilaţie este modul normal cu pulsaţia proprie minimă, iar cel antisimetric este modul normal cu pulsaţia proprie maximă!

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Cele două coordonate normale η şi ξ sunt combinaţii liniare de x_1 şi x_2. Din observaţiile de mai sus rezultă

$$x_1 = Be^{i\omega_1 t} + Ae^{i\omega_2 t} = \eta + \xi$$

şi

$$x_2 = Be^{i\omega_1 t} - A\frac{m_1}{m_2}e^{i\omega_2 t} = \eta + -\frac{m_1}{m_2}\xi$$

Din aceste ecuaţii rezultă expresiile pentru coordonatele normale

$$\begin{cases} \eta &= \dfrac{1}{m_1+m_2}(m_1x_1 + m_2x_2) \\ \xi &= \dfrac{m_2}{m_1+m_2}(x_1 - x_2) \end{cases}$$

sau, simplificat

$$\begin{cases} \eta &= m_1x_1 + m_2x_2 \\ \xi &= x_1 - x_2 \end{cases}$$

În aceste condiţii, ecuaţiile de mişcare se scriu decuplate

$$\ddot{\eta} + \omega_1^2\eta = 0$$

şi

$$\ddot{\xi} + \omega_2^2\xi = 0$$

Se observă că η este tocmai coordonata centrului de masă, aşa cum era de aşteptat, iar ξ coordonata primei particule în sistemul de referinţă legat de a doua. Dacă originea sistemului de referinţă se alege în locul în care se găseşte particula a doua, iar în locul în care se află prima particulă se află un corp fictiv cu masa egală cu masa redusă a sistemului, atunci dinamica sistemului este echivalentă cu dinamica corpului fictiv, aşa cum s-a văzut deja.

1.10.3 a) Sistemul perturbat arată ca în Fig. 1.10.3R.

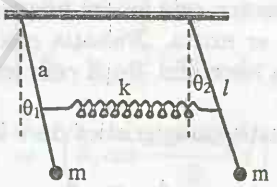


Fig. 1.10.3R

Forţa elastică din resort este

$$F = k(a\sin\theta_2 - a\sin\theta_1) \simeq ka(\theta_2 - \theta_1)$$

Ecuaţiile de mişcare ale celor două pendule sunt

$$\begin{cases} ml^2\ddot{\theta}_1 &= Fa\cos\theta_1 - mgl\sin\theta_1 \\ ml^2\ddot{\theta}_2 &= -Fa\cos\theta_2 - mgl\sin\theta_2 \end{cases}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

sau

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \left(\frac{g}{l} + \frac{ka^2}{ml^2}\right)\theta_1 - \frac{ka^2}{ml^2}\theta_2 &= 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \left(\frac{g}{l} + \frac{ka^2}{ml^2}\right)\theta_2 - \frac{ka^2}{ml^2}\theta_1 &= 0 \end{cases}$$

Căutând soluţii de forma

$$\theta_{1,2} = A_{1,2}e^{i\omega t}$$

rezultă sistemul de ecuaţii caracteristice ale sistemului de ecuaţii de mişcare de mai sus

$$\begin{cases} \left(-\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{ka^2}{ml^2}\right)A_1 - \frac{ka^2}{ml^2}A_2 &= 0 \\ -\frac{ka^2}{ml^2}A_1 + \left(-\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{ka^2}{ml^2}\right)A_2 &= 0 \end{cases}$$

de unde se deduce ecuaţia seculară

$$\omega^4 - 2\omega^2\left(\frac{g}{l} + \frac{ka^2}{ml^2}\right) + \frac{g}{l}\left(\frac{g}{l} + 2\frac{ka^2}{ml^2}\right) = 0$$

ale cărei soluţii sunt

$$\begin{aligned} \omega_\pm^2 &= \left(\frac{g}{l} + \frac{ka^2}{ml^2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{g}{l} + \frac{ka^2}{ml^2}\right)^2 - \frac{g}{l}\left(\frac{g}{l} + 2\frac{ka^2}{ml^2}\right)} \\ &= \left(\frac{g}{l} + \frac{ka^2}{ml^2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{ka^2}{ml^2}\right)^2} = \left(\frac{g}{l} + \frac{ka^2}{ml^2}\right) \pm \left(\frac{ka^2}{ml^2}\right) \end{aligned}$$

sau

$$\begin{cases} \omega_-^2 &= \frac{g}{l} \\ \omega_+^2 &= \frac{g}{l} + 2\frac{ka^2}{ml^2} \end{cases}$$

Se observă de aici că modul simetric este modul în care cele două pendule oscilează identic, ca şi cum resortul nu ar exista. Pulsaţia modului antisimetric conţine în expresia sa constanta elastică a resortului, după cum era şi de aşteptat.

1. Pentru $\omega = \omega_-$ prima ecuaţie caracteristică duce la

$$\begin{aligned} A_1 &= A \\ A_2 &= A \end{aligned}$$

iar pentru $\omega = \omega_+$

$$\begin{aligned} A_1' &= B \\ A_2' &= -B \end{aligned}$$

În aceste condiţii

$$\begin{cases} \theta_1 &= Ae^{i\omega_- t} + Be^{i\omega_+ t} &= \eta + \xi \\ \theta_2 &= Ae^{i\omega_- t} - Be^{i\omega_+ t} &= \eta - \xi \end{cases}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

de unde rezultă coordonatele normale

$$\begin{cases} \eta &= \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \\ \xi &= \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2) \end{cases}$$

b) La $t = 0$

$$\begin{cases} \theta_1 &= \theta_0 \\ \dot{\theta}_1 &= 0 \end{cases}$$

şi

$$\begin{cases} \theta_2 &= 0 \\ \dot{\theta}_2 &= 0 \end{cases}$$

În aceste condiţii, constantele ce apar în ecuaţiile ce descriu soluţiile ecuaţiilor de mişcare

$$\begin{cases} \theta_1 &= A\cos\left(\omega_- t + \varphi_-\right) + B\cos\left(\omega_+ t + \varphi_+\right) \\ \theta_2 &= A\cos\left(\omega_- t + \varphi_-\right) - B\cos\left(\omega_+ t + \varphi_+\right) \end{cases}$$

satisfac ecuaţiile

$$\begin{cases} A\cos\varphi_- + B\cos\varphi_+ &= \theta_0 \\ \omega_- A\sin\varphi_- + \omega_+ B\sin\varphi_+ &= 0 \\ A\cos\varphi_- - B\cos\varphi_+ &= 0 \\ \omega_- A\sin\varphi_- - \omega_+ B\sin\varphi_+ &= 0 \end{cases}$$

de unde

$$\begin{cases} \varphi_- &= 0 \\ \varphi_+ &= 0 \\ A &= \frac{\theta_0}{2} \\ B &= \frac{\theta_0}{2} \end{cases}$$

Ecuaţiile de mişcare se scriu

$$\begin{cases} \theta_1 &= \dfrac{\theta_0}{2}(\cos\omega_- t + \cos\omega_+ t) \\ \theta_2 &= \dfrac{\theta_0}{2}(\cos\omega_- t - \cos\omega_+ t) \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \theta_1 &= \left(\theta_0\cos\dfrac{\omega_+ - \omega_-}{2}t\right)\cdot\cos\dfrac{\omega_- + \omega_+}{2}t \\ \theta_2 &= \left(\theta_0\sin\dfrac{\omega_+ - \omega_-}{2}t\right)\cdot\sin\dfrac{\omega_- + \omega_+}{2}t \end{cases}$$

Se observă că atunci când una din amplitudini este maximă, cealaltă este nulă. Aceasta este esenţa fenomenului de bătăi: transferul de energie de la un oscilator la altul prin intermediul legăturii (în cazul de faţă, al resortului). Pulsaţia oscilaţiilor este

$$\omega = \frac{\omega_- + \omega_+}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\left(1 + \sqrt{1 + 2\frac{ka^2}{mgl}}\right)$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

iar pulsaţia bătăilor

$$\omega_b = \omega_+ - \omega_- = \sqrt{\frac{g}{l}}\left(\sqrt{1+2\frac{ka^2}{mgl}} - 1\right)$$

Dacă $2\frac{ka^2}{mgl} \ll 1$ atunci

$$\omega \simeq \sqrt{\frac{g}{l}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{ka^2}{mgl}\right)$$

şi

$$\omega_b \simeq \frac{ka^2}{mgl}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

1.10.4 Pentru primul pendul, ecuaţia de mişcare este [Fig. 1.10.4R (a)]

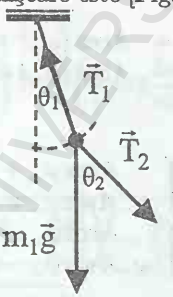


Fig. 1.10.4R (a)

$$m_1 a_{1tg} = T_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - m_1 g \sin\theta_1$$

sau

$$m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 + m_1 g \theta_1 - T_2(\theta_2 - \theta_1) = 0 \qquad (1)$$

Punctul de suspensie al celui de-al doilea pendul se mişcă accelerat, acceleraţia sa fiind rezultanta acceleraţiilor $\vec{a}_{1tg}$ şi $\vec{a}_{1cp}$. Prin urmare, scrierea ecuaţiei de mişcare al acestui pendul se poate face în sistemul de referinţă neinerţial legat de punctul său de suspensie, iar forţele care acţionează asupra sa în acest sistem sunt desenate în Fig. 1.10.4R (b).

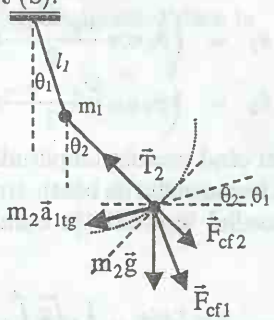


Fig. 1.10.4R (b)

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Înainte de a scrie ecuaţiile pentru pendulul al doilea vom remarca că $F_{cf1} \sim \dot{\theta}_1^2 \simeq 0$ şi că $F_{cf2} \sim \dot{\theta}_2^2 \simeq 0$. Prin urmare:

- pe direcţie tangenţială

$$m_2 a_{2tg} = -m_2 g \sin\theta_2 - m_2 a_{1tg} \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

- pe direcţie normală

$$m_2 g \cos\theta_2 = T_2 + m_2 a_{1tg} \sin(\theta_2 - \theta_1)$$

Aceste ultime două ecuaţii se rescriu astfel

$$m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 g \theta_2 + m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 = 0 \tag{2}$$

şi

$$m_2 g = T_2 \tag{3}$$

Înlocuind (3) în (1) rezultă

$$m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 + m_1 g \theta_1 - m_2 g(\theta_2 - \theta_1) = 0 \tag{4}$$

Ecuaţiile de mişcare (2) şi (4) se rescriu astfel

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \left(1 + \dfrac{m_2}{m_1}\right)\dfrac{g}{l_1}\theta_1 - \dfrac{m_2}{m_1}\dfrac{g}{l_1}\theta_2 = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \left(1 + \dfrac{m_2}{m_1}\right)\dfrac{g}{l_2}\theta_2 - \left(1 + \dfrac{m_2}{m_1}\right)\dfrac{g}{l_2}\theta_1 = 0 \end{cases}$$

Căutând soluţii de forma

$$\theta_{1,2} = A_{1,2} e^{i\omega t}$$

rezultă sistemul de ecuaţii caracteristice

$$\begin{cases} \left[-\omega^2 + \left(1 + \dfrac{m_2}{m_1}\right)\dfrac{g}{l_1}\right] A_1 + \left(-\dfrac{m_2}{m_1}\dfrac{g}{l_1}\right) A_2 = 0 \\ -\left(1 + \dfrac{m_2}{m_1}\right)\dfrac{g}{l_2} A_1 + \left[-\omega^2 + \left(1 + \dfrac{m_2}{m_1}\right)\dfrac{g}{l_2}\right] A_2 = 0 \end{cases}$$

Ecuaţia seculară este

$$\omega^4 - \omega^2\left[\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) g\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)\right] + \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\frac{g}{l_1}\frac{g}{l_2} = 0$$

cu soluţiile

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2}\frac{g}{l_1 l_2} \cdot \left[\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)(l_1 + l_2) \pm \sqrt{\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\left(\frac{m_2}{m_1}(l_1 + l_2)^2 + (l_1 - l_2)^2\right)}\right]$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

(a) Dacă $m_2 \ll m_1$ atunci pulsaţiile modurilor normale de oscilaţie se scriu

$$\omega_-^2 = \frac{g}{l_1}$$

şi

$$\omega_+^2 = \frac{g}{l_2}$$

În acest caz pendulele oscilează independent!

(b) Dacă $m_2 = m_1 = m$ şi $l_2 = l_1 = l$ pulsaţiile sunt

$$\omega_-^2 = \frac{g}{l}\left(2 - \sqrt{2}\right)$$

şi

$$\omega_+^2 = \frac{g}{l}\left(2 + \sqrt{2}\right)$$

1.10.5 Ecuaţia de mişcare radială este

$$ma_r = mg\cos\theta - k(r - l)$$

unde

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

Ecuaţia de mişcare azimutală este

$$ma_\theta = -mg\sin\theta$$

unde

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

Ţinând cont că deplasările sunt mici

$$\begin{cases} r - r_0 = \rho \ll r_0 \\ \theta - \theta_0 = \theta \ll 1 \text{ (rad)} \end{cases}$$

ecuaţiile de mai sus se rescriu astfel

$$\begin{cases} \ddot{\rho} + \dfrac{k}{m}\rho = 0 \\ \ddot{\theta} + \dfrac{g}{r_0}\theta = 0 \end{cases}$$

Prin urmare, după ambele direcţii, radială şi azimutală, corpul execută mişcări oscilatorii descrise de ecuaţiile

$$\begin{cases} r = r_0 + A\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t + \varphi_1\right) \\ \theta = B\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{\frac{l}{g} + \frac{m}{k}}}t + \varphi_2\right) \end{cases}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Cum la $t = 0$

$$\begin{cases} \theta_0 &= 0 \\ \dot{\theta}_0 &= \dfrac{v_0}{r_0} \\ \ddot{\theta}_0 &= 0 \\ r_0 &= l + \dfrac{mg}{k} \\ \dot{r}_0 &= 0 \\ \ddot{r}_0 &= 0 \end{cases}$$

rezultă

$$\varphi_1 = \varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$$

şi

$$\begin{cases} A &= 0 \\ B &= \dfrac{v_0}{r_0}\sqrt{\dfrac{l}{g} + \dfrac{m}{k}} \end{cases}$$

Deci

$$\begin{cases} r &= l + \dfrac{mg}{k} \\ \theta &= \dfrac{v_0}{g\sqrt{\frac{l}{g} + \frac{m}{k}}} \sin \dfrac{1}{\sqrt{\frac{l}{g} + \frac{m}{k}}} t \end{cases}$$

1.10.6 a)

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{k}{m}\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

şi

$$\begin{cases} \eta &= \frac{\sqrt{5}}{5}x_1 + \frac{\sqrt{5}+1}{2}x_2 \\ \xi &= +\frac{\sqrt{5}}{5}x_1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}x_2 \end{cases}$$

b)

$$\omega_-^2 = \frac{k}{m}$$

şi

$$\omega_+^2 = \frac{3k}{m}$$

$$\begin{aligned} \eta &= x_1 + x_2 \\ \xi &= x_1 - x_2 \end{aligned}$$

1.10.7 Pentru modul normal de translaţie

$$\omega_1^2 = \frac{2k}{m}$$

Pentru modul normal de rotaţie

$$\omega_2^2 = \frac{5}{6}\frac{g}{L}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.10.8 Ecuaţiile de mişcare sunt

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \left(1 + \dfrac{m}{M}\right)\dfrac{g}{l}\theta - \dfrac{k}{Ml}x &= 0 \\ \ddot{x} + \dfrac{k}{M}x - \dfrac{m}{M}g\theta &= 0 \end{cases}$$

de unde rezultă ecuaţia seculară

$$\omega^4 - \omega^2\left[\frac{k}{M} + \frac{g}{l}\left(1 + \frac{m}{M}\right)\right] + \frac{k}{M}\frac{g}{l} = 0$$

ale cărei soluţii sunt

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{k}{M} + \frac{g}{l}\left(1 + \frac{m}{M}\right) \pm \sqrt{\left[\frac{k}{M} + \frac{g}{l}\left(1 + \frac{m}{M}\right)\right]^2 - 4\frac{k}{M}\frac{g}{l}}\right]$$

Dacă $m \ll M$, atunci

$$\omega_-^2 = \frac{k}{M}$$

şi

$$\omega_+^2 = \frac{g}{l}$$

adică, părţile sistemului oscilează independent.

1.10.9 Ecuaţiile de mişcare ale sistemului sunt:

- pentru corpul cu masa M

$$M\ddot{x} = T\sin\theta \simeq T\theta$$

Cum forţa centrifugă care acţionează asupra pendulului este proporţională cu $\dot{\theta}^2$, aceasta se neglijează, iar din echilibrul forţelor de-a lungul tijei

$$T + m\ddot{x}\sin\theta = mg\cos\theta$$

rezultă

$$T \simeq mg$$

Prin urmare, ecuaţia de mişcare a corpului cu masa M se rescrie

$$\ddot{x} - \frac{m}{M}g\theta = 0 \tag{1}$$

- pentru mişcarea de rotaţie a pendulului

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta - m\ddot{x}l\cos\theta$$

sau

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta + \frac{\ddot{x}}{l} = 0 \tag{2}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Din (1) şi (2) rezultă

$$\begin{cases} \ddot{x} - \frac{m}{M} g\theta & = & 0 \\ \ddot{\theta} + \left(1 + \frac{m}{M}\right) \frac{g}{l} \theta & = & 0 \end{cases} \tag{3}$$

Soluţiile acestui sistem sunt

$$\begin{cases} \theta & = & A \cos\left(\sqrt{\left(1 + \frac{m}{M}\right) \frac{g}{l}} t + \varphi\right) \\ x & = & C_1 + C_2 t - \frac{lA}{1 + \frac{M}{m}} \cos\left(\sqrt{\left(1 + \frac{m}{M}\right) \frac{g}{l}} t + \varphi\right) \end{cases}$$

Folosind condiţiile iniţiale, aceste soluţii devin

$$\begin{cases} \theta & = & \theta_0 \cos\sqrt{\left(1 + \frac{m}{M}\right) \frac{g}{l}} t \\ x & = & x_0 + \frac{l\theta_0}{1 + \frac{M}{m}} \left(1 - \cos\sqrt{\left(1 + \frac{m}{M}\right) \frac{g}{l}} t\right) \end{cases}$$

Pentru a justifica denumirea pendulului, trebuie scrise coordonatele pendulului (ale corpului cu masa m)

$$\begin{cases} x_1 & = & x + l \sin\theta = x + l\theta \\ y_1 & = & l \cos\theta = l\sqrt{1 - \theta^2} \end{cases}$$

sau

$$\frac{\left(x_1 - x_0 - \frac{l\theta_0}{1 + \frac{M}{m}}\right)^2}{\left(\frac{l}{1 + \frac{m}{M}}\right)^2} + \frac{y_1^2}{l^2} = 1$$

deci traiectoria corpului cu masa m este un arc de elipsă. Se poate demonstra că acest pendul îşi merită numele nu doar pentru deviaţii mici de la poziţia de echilibru!

1.10.10 Ecuaţiile de mişcare ale sistemului sunt:

- pentru resort

$$\frac{m}{3} \ddot{y} = mg + T \cos\theta - k(y + y_0)$$

- pentru pendul

$$T = M\left(g - \ddot{y}\right) \cos\theta$$

şi

$$Ml^2 \ddot{\theta} + M\left(g - \ddot{y}\right) l \sin\theta = 0$$

Pentru deviaţii mici aceste ecuaţii se scriu

$$\left(\frac{m}{3} + M\right) \ddot{y} = (m + M) g - k(y + y_0)$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\left(1 - \frac{\ddot{y}}{g}\right)\theta = 0$$

sau

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

cu soluţia

$$\theta = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \varphi_1\right)$$

La echilibru

$$ky_0 = \left(\frac{m}{2} + M\right)g$$

de unde

$$\ddot{y} + \frac{k}{\frac{m}{3} + M}y - \frac{m}{2\left(\frac{m}{3} + M\right)}g = 0$$

sau

$$\left(y - \frac{m}{2k}g\right)^{\cdot\cdot} + \frac{k}{\frac{m}{3} + M}\left(y - \frac{m}{2k}g\right) = 0$$

Soluţia acestei ecuaţii este

$$y = \frac{m}{2k}g + B\cos\left(\sqrt{\frac{k}{\frac{m}{3} + M}}t + \varphi_2\right)$$

Se observă deci că în cazul micilor oscilaţii, cele două oscilaţii sunt independente. Folosind condiţiile iniţiale rezultă

$$\begin{cases} \theta = & \frac{v_0}{\sqrt{gl}}\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t \\ y = & \frac{m}{2k}g\left(1 + \frac{2M}{m}\cos\sqrt{\frac{k}{\frac{m}{3} + M}}t\right) \end{cases}$$

1.10.11 Ecuaţiile de mişcare sunt

$$M\ddot{x} = -2kx - T\sin\theta \simeq -2kx - T\theta$$

şi

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta + m\ddot{x}l\cos\theta \simeq -mgl\theta + m\ddot{x}l$$

Deoarece forţa centrifugă care acţionează asupra corpului cu masa m se poate neglija, ea fiind proporţională cu $\dot{\theta}^2$, tensiunea din tijă are expresia

$$T = mg\cos\theta + m\ddot{x}\sin\theta$$

sau

$$T \simeq mg + m\ddot{x}\theta \simeq mg$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Prin urmare, ecuaţiile de mişcare se rescriu

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dfrac{2k}{M}x + \dfrac{mg}{M}\theta & = 0 \\ \ddot{\theta} + \left(1 + \dfrac{m}{M}\right)\dfrac{g}{l}\theta + \dfrac{2k}{Ml}x & = 0 \end{cases}$$

Ecuaţia seculară este

$$\omega^4 - \omega^2\left[\left(1 + \frac{m}{M}\right)\frac{g}{l} + \frac{2k}{M}\right] + \frac{2k}{M}\frac{g}{l} = 0$$

de unde

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2}\left\{\left(1 + \frac{m}{M}\right)\frac{g}{l} + \frac{2k}{M} \pm \sqrt{\left[\left(1 + \frac{m}{M}\right)\frac{g}{l} + \frac{2k}{M}\right]^2 - \frac{8k}{M}\frac{g}{l}}\right\}$$

Dacă $m = M$

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{g}{l} + \frac{k}{M} \pm \sqrt{\left(\frac{g}{l}\right)^2 + \left(\frac{k}{M}\right)^2}$$

Dacă $m \ll M$

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{g}{l} + \frac{2k}{M} \pm \left[\frac{g}{l} - \frac{2k}{M}\right]\right\}$$

deci

$$\omega_-^2 = \frac{2k}{M}$$

şi

$$\omega_+^2 = \frac{g}{l}$$

În acest caz cei doi oscilatori se mişcă independent.

1.10.12 Corpul cu masa M se mişcă sub acţiunea forţei $F_y = T\sin\theta \simeq T\theta$, iar ecuaţia de mişcare este

$$Ma_\varphi = F_\varphi = F_y\cos\varphi \simeq F_y$$

sau

$$Mr\ddot{\varphi} = T\theta$$

Ecuaţia de mişcare a pendulului este

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta - ma_y l\cos\theta$$

unde

$$a_y = a_\varphi\cos\varphi \simeq a_\varphi = r\ddot{\varphi}$$

deci

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta + \frac{r}{l}\ddot{\varphi} = 0$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Tensiunea din tija pendulului este, neglijând forţa centrifugă

$$T = mg\cos\theta - ma_y \sin\theta \simeq mg$$

În aceste condiţii, ambele ecuaţii de mişcare se rescriu astfel

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} - \dfrac{mg}{Mr}\theta & = & 0 \\ \ddot{\theta} + \left(1 + \dfrac{m}{M}\right)\dfrac{g}{l}\theta & = & 0 \end{cases}$$

având soluţiile

$$\begin{cases} \varphi & = & C_1 + C_2 t - A\dfrac{l}{\left(1+\frac{M}{m}\right)r}\cos\left(\sqrt{\left(1+\dfrac{m}{M}\right)\dfrac{g}{l}}t + \alpha\right) \\ \theta & = & A\cos\left(\sqrt{\left(1+\dfrac{m}{M}\right)\dfrac{g}{l}}t + \alpha\right) \end{cases}$$

Făcând uz de condiţiile iniţiale, ecuaţiile de mişcare capătă forma

$$\begin{cases} \varphi & = & \theta_0\dfrac{l}{\left(1+\frac{M}{m}\right)r}\left(1 - \cos\sqrt{\left(1+\dfrac{m}{M}\right)\dfrac{g}{l}}t\right) \\ \theta & = & \theta_0\cos\sqrt{\left(1+\dfrac{m}{M}\right)\dfrac{g}{l}}t \end{cases}$$

1.10.13

$$\omega_-^2 = 0$$

şi

$$\omega_+^2 = \frac{k}{M}\left(\cos^2\alpha - \frac{M}{m}\right)$$

Se observă că sistemul poate oscila doar dacă

$$M < m\cos^2\alpha$$

1.10.14

$$\omega_-^2 = \frac{T}{ml}$$

şi

$$\omega_+^2 = 3\frac{T}{ml}$$

1.10.15

$$\omega_\pm^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\frac{g}{l} + 3\frac{k}{M} + \frac{k}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\frac{g}{l} + 3\frac{k}{M} + \frac{k}{m}\right)^2 - 6\frac{k}{m}\frac{g}{l}}\right]$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.10.16 a) Ecuaţiile de mişcare ale corpurilor sunt

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 &= F_0e^{i\Omega t} - k\,(x_1 - x_2) \\ m_2\ddot{x}_2 &= k\,(x_1 - x_2) \end{cases}$$

Căutând soluţii de forma

$$x_{1,2} = A_{1,2}e^{i\omega t}$$

se vede că rezonanţa se obţine dacă Ω coincide cu ω, adică cu una dintre pulsaţiile proprii ale sistemului. Acestea fiind $\omega_-^2 = 0$ şi $\omega_+^2 = \frac{k}{\mu} = k\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}$, rezultă că

$$\Omega = \omega_+ = \sqrt{k\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}}$$

b) Soluţiile ecuaţiilor de mişcare sunt

$$\begin{cases} x_1 &= Ae^{i\Omega t} \\ x_2 &= Be^{i\Omega t} \end{cases}$$

coeficienţii A şi B fiind soluţiile sistemului de ecuaţii caracteristice

$$\begin{cases} (-\Omega^2m_1 + k)\,A &- & kB & = & F_0 \\ -kA & + & (-\Omega^2m_2 + k)\,B & = & 0 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} -k\dfrac{m_1}{m_2}A &- & kB & = & F_0 \\ -kA & - & k\dfrac{m_2}{m_1}B & = & 0 \end{cases}$$

adică

$$\begin{cases} A &= & A \\ B &= & -\dfrac{m_1}{m_2}A \end{cases}$$

1.10.17 Ecuaţiile de mişcare ale sistemului sunt

$$\begin{cases} M\ddot{x}_1 &= F_0e^{i\Omega t} - k_1\,(x_1 - x_2) - kx_1 \\ m\ddot{x}_2 &= k_1\,(x_1 - x_2) \end{cases}$$

Sistemul de ecuaţii caracteristice este

$$\begin{cases} (k + k_1 - M\Omega^2)\,A &- & k_1B & = & F_0 \\ -k_1A & + & (k_1 - \Omega^2m)\,B & = & 0 \end{cases}$$

având soluţiile

$$\begin{cases} A &= \dfrac{F_0}{k_1}\dfrac{k_1 - m\Omega^2}{(k_1 - m\Omega^2)\left(1 + \dfrac{k - M\Omega^2}{k_1}\right) - k_1} \\ B &= F_0\dfrac{1}{(k_1 - m\Omega^2)\left(1 + \dfrac{k - M\Omega^2}{k_1}\right) - k_1} \end{cases}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Se observă de aici că $A = 0$ dacă $k_1 = m\Omega^2$, adică Ω este tocmai pulsaţia proprie a amortizorului. Prin urmare, amortizorul trebuie ales astfel încât să aibă pulsaţia proprie egală cu pulsaţia forţei excitatoare. Dar $\Omega^2 = \frac{k}{M}$ şi deci

$$k_1 = k\frac{m}{M} \tag{1}$$

Pe de altă parte, din enunţ

$$A_0 = B_{\max}$$

valoare care se realizează pentru

$$\Omega^2 = \frac{1}{2M}\left(k_1 - k + k_1\frac{M}{m}\right)$$

sau

$$m = \frac{M}{1 - \frac{k}{k_1}} \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă

$$\begin{cases} m = 2M \\ k_1 = 2k \end{cases}$$

1.10.18 Ecuaţiile de mişcare ale corpurilor sunt

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = k_1(x_2 - x_1) \\ m_2\ddot{x}_2 = -k_1(x_2 - x_1) + k_2(x_3 - x_2) \\ m_3\ddot{x}_3 = -k_2(x_3 - x_2) \end{cases}$$

Ecuaţia secular̆ă este

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 + \frac{k_1}{m_1} & -\frac{k_1}{m_1} & 0 \\ -\frac{k_1}{m_2} & -\omega^2 + \frac{k_1 + k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} \\ 0 & -\frac{k_2}{m_3} & -\omega^2 + \frac{k_2}{m_3} \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$\omega^2\left[\omega^4 - \omega^2\left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_1 + k_2}{m_2} + \frac{k_2}{m_3}\right) + k_1k_2\frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1m_2m_3}\right] = 0$$

de unde

$$\omega_1^2 = 0$$

şi

$$\omega_{2,3}^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_1 + k_2}{m_2} + \frac{k_2}{m_3} \pm \sqrt{\left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_1 - k_2}{m_2} - \frac{k_2}{m_3}\right)^2 + \frac{4k_1k_2}{m_2^2}}\right]$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Dacă $m_1 = m_3$ şi $k_1 = k_2 = k$ (cazul moleculei de CO_2 de exemplu) rezultă

$$\omega_{2,3}^2 = k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \pm \frac{1}{m_2}\right)$$

sau

$$\omega_2^2 = \frac{k}{m_1}$$

şi

$$\omega_{2,3}^2 = k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{2}{m_2}\right)$$

1.10.19 $\omega_1^2 = \left(2-\sqrt{2}\right)\frac{k}{m}$, $\omega_2^2 = 2\frac{k}{m}$, $\omega_3^2 = \left(2+\sqrt{2}\right)\frac{k}{m}$

1.10.20 $\omega^2 \in \left\{0; \frac{g}{l}; (1+2\frac{m}{M})\frac{g}{l}\right\}$

1.10.21 Ecuaţiile de mişcare sunt

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \frac{k}{m}(2\theta_1 - \theta_2 - \theta_3) = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \frac{k}{m}(2\theta_2 - \theta_3 - \theta_1) = 0 \\ \ddot{\theta}_3 + \frac{k}{M}(2\theta_3 - \theta_1 - \theta_2) = 0 \end{cases}$$

de unde rezultă sistemul de ecuaţii caracteristice

$$\begin{cases} \left(-\omega^2 + 2\frac{k}{m}\right)A_1 - \frac{k}{m}A_2 - \frac{k}{m}A_3 = 0 \\ -\frac{k}{m}A_1 + \left(-\omega^2 + 2\frac{k}{m}\right)A_2 - \frac{k}{m}A_3 = 0 \\ -\frac{k}{M}A_1 - \frac{k}{M}A_2 + \left(-\omega^2 + 2\frac{k}{M}\right)A_3 = 0 \end{cases}$$

De unde rezultă pulsaţiile proprii

$$\begin{cases} \omega_1^2 = 0 \\ \omega_2^2 = k\left(\frac{1}{m} + \frac{2}{M}\right) \\ \omega_3^2 = 3\frac{k}{m} \end{cases}$$

Primul mod corespunde rotaţiei sistemului ca un tot (ca un solid rigid).

Pentru a afla coordonatele normale se vor înlocui pe rând pulsaţiile proprii în sistemul de ecuaţii caracteristice.

- pentru ω_1 se obţin egalităţile

$$A_1 = A_2 = A_3 = A$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

- pentru ω_2 se obţin egalităţile

$$A_1' = A_2' = B \quad \text{şi} \quad A_3' = -2\frac{m}{M}B$$

pentru ω_3 se obţin egalităţile

$$A_1'' = -A_2'' = C \quad \text{şi} \quad A_3 = 0$$

Prin urmare

$$\begin{cases} \theta_1 = \eta + \xi + \chi \\ \theta_2 = \eta + \xi - \chi \\ \theta_3 = \eta - 2\dfrac{m}{M}\xi \end{cases}$$

de unde

$$\begin{cases} \eta = \dfrac{\theta_1 + \theta_2 + \frac{M}{m}\theta_3}{2 + \frac{M}{m}} \\ \xi = \dfrac{\theta_1 + \theta_2 - 2\theta_3}{2\frac{m}{M}\left(2 + \frac{M}{m}\right)} \\ \chi = \dfrac{\theta_1 - \theta_2}{2} \end{cases}$$

sau, mai simplu

$$\begin{cases} \eta = \theta_1 + \theta_2 + \dfrac{M}{m}\theta_3 \\ \xi = \theta_1 + \theta_2 - 2\theta_3 \\ \chi = \theta_1 - \theta_2 \end{cases}$$

1.10.22 Ecuaţia de mişcare pentru atomul p este

$$m\ddot{x}_p = k\left(x_{p+1} + x_{p-1} - 2x_p\right)$$

În absenţa frecărilor oscilaţiile sunt "staţionare" şi au aceeaşi amplitudine. Prin urmare vom căuta soluţii sub forma

$$x_p = Ae^{i(\omega t + p\beta a)}$$

unde β reprezintă inversul distanţei dintre punctele în care oscilaţiile sunt în fază (mai exact 2π înmulţit cu inversul acestei distanţe, aşa cum se va vedea la unde).

În aceste condiţii

$$-m\omega^2 = k\left(e^{i\beta a} + e^{-i\beta a} - 2\right)$$

sau

$$\omega^2 = 2\frac{k}{m}\left(1 - \cos\beta a\right) = 4\frac{k}{m}\sin^2\frac{\beta a}{2}$$

de unde

$$\omega = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\frac{\beta a}{2}$$

Reprezentarea $\omega(\beta)$ are două ramuri (două curbe de dispersie): una în care oscilaţiile sunt în fază - numită ramura acustică şi una în care oscilaţiile sunt în opoziţie de fază - numită ramura optică.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2 UNDE ELASTICE

2.1 Proprietăţi generale. Unde armonice

2.1.1 $\lambda = vT = \dfrac{l\,\tau}{t\,n} = \dfrac{12\text{ m}}{5\text{ s}}\dfrac{20\text{ s}}{12} = 4\text{ m}$

2.1.2 În sistemul de referinţă legat de râu sursa de unde (locul unde cade piatra) este în repaus şi suprafeţele de undă sunt cercuri concentrice. Faţă de acest sistem de referinţă locul de unde se aruncă piatra se deplasează cu viteza v de curgere a râului, dar în sens invers sensului de curgere a râului. În momentul în care frontul undei ajunge în dreptul punctului de aruncare (Fig. 2.1.2R) putem scrie $(c\tau)^2 = L^2 + (v\tau)^2$, de unde $\tau = \dfrac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}}$.

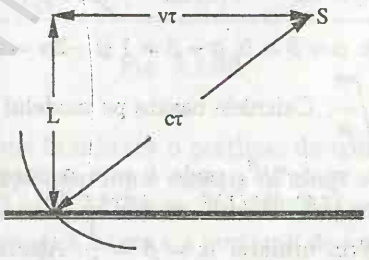


Fig. 2.1.2R

2.1.3 Valul care atinge primul malul este cel format în punctul B (Fig. 2.1.3R), deoarece până în B componenta vitezei bărcii perpendiculară pe mal este mai mare decât viteza valurilor şi prin urmare valurile vor rămâne în urma bărcii. În B $c = v_\perp = v\sin\theta$, de unde $\sin\theta = \dfrac{c}{v} = \dfrac{1}{2}$, deci $\theta = \dfrac{\pi}{6}$. Distanţa străbătută de valul format în B este $l = L - r\cos\theta = \dfrac{L}{2}(2 - \cos\theta) = \dfrac{L}{4}\left(4 - \sqrt{3}\right)$.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

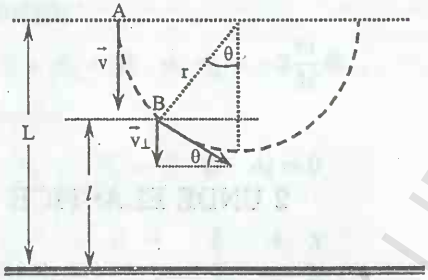


Fig. 2.1.3R

Timpul în care valul format în B atinge malul este $\tau = t - t_1$, unde t_1 este timpul în care barca a parcurs porţiunea AB a virajului: $t_1 = \dfrac{AB}{v} = \dfrac{r\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{v} = \dfrac{\pi L}{6v}$.

Cum $c = \dfrac{l}{\tau}$ rezultă $L = \dfrac{12vct}{3v(4-\sqrt{3}) + 2\pi c} \simeq 362$ m

2.1.4 a) $F = \dfrac{\Delta p}{\Delta t} = \dfrac{\Delta m \cdot v}{\Delta t} = \dfrac{\frac{m}{l}\Delta x \cdot v}{\Delta t} = \dfrac{m}{l}v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\dfrac{Fl}{m}}$.

b) Perturbaţia se deplasează faţă de frânghie cu viteza $c = \sqrt{\dfrac{F}{\mu}} = \sqrt{\dfrac{Fl}{m}} \equiv v$. Dacă perturbaţia se deplasează în acelaşi sens cu cel în care se derulează frânghia atunci viteza perturbaţiei faţă de suprafaţa orizontală este $c_1 = c + v = 2v$. Dacă perturbaţia se deplasează în sens invers, atunci viteza perturbaţiei faţă de suprafaţa orizontală este $c_2 = c - v = 0$.

2.1.5 Din enunţ: $c = bT^\alpha \mu^\beta$, unde b este o constantă. Trecând la dimensiuni:

$$[c] \equiv LT^{-1} = (MLT^{-2})^\alpha (ML^{-1})^\beta = M^{\alpha+\beta} L^{\alpha-\beta} T^{-2\alpha}$$

De aici rezultă: $\alpha + \beta = 0$, $\alpha - \beta = 1$ şi $-2\alpha = -1$. Prin urmare: $\alpha = -\beta = \dfrac{1}{2}$.

Aşadar $c = b\sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$. Calculele bazate pe modelul fizic concret arată că $b = 1$.

2.1.6 Din enunţ: $c = bg^\alpha \lambda^\beta$, unde b este o constantă. Trecând la dimensiuni: $[c] \equiv LT^{-1} = (LT^{-2})^\alpha (L)^\beta = L^{\alpha+\beta} T^{-2\alpha}$. De aici rezultă: $\alpha + \beta = 1$ şi $-2\alpha = -1$. Prin urmare: $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$. Aşadar $c = b\sqrt{g\lambda}$. Calculele bazate pe modelul fizic concret arată că $b = 1$.

2.1.7 Din enunţ: $c = b\sigma^\alpha \rho^\beta \lambda^\gamma$, unde b este o constantă. Trecând la dimensiuni:

$$[c] \equiv LT^{-1} = (MT^{-2})^\alpha (ML^{-3})^\beta (L)^\gamma = M^{\alpha+\beta} L^{-3\beta+\gamma} T^{-2\alpha}$$

De aici rezultă: $\alpha + \beta = 0$, $-3\beta + \gamma = 1$ şi $-2\alpha = -1$. Prin urmare: $\alpha = -\beta = \dfrac{1}{2}$ şi $\gamma = -\dfrac{1}{2}$. Aşadar $c = b\sqrt{\dfrac{\sigma}{\rho\lambda}}$. Calculele bazate pe modelul fizic concret arată că $b = 1$.

BCU IAŞI / CENTRUL UNIVERSITAR LIBRARY

⋆2.1.8 Dacă la $t = 0$ o forţă F acţionează asupra capătului unei bare cu secţiunea S, atunci la un moment ulterior oarecare t perturbaţia a parcurs distanţa $AD = ct$ (Fig. 2.1.8R), iar particulele din secţiunea AA' se află în planul BB' aflat la distanţa $AB = vt$ de locul iniţial.

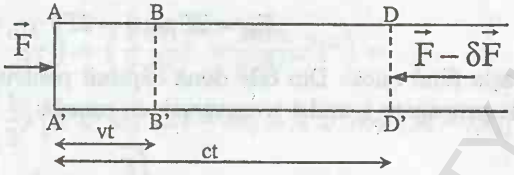


Fig. 2.1.8R

În aceste condiţii variaţia impulsului porţiunii de bară perturbată este $\Delta p = \Delta m \cdot v = \rho S ct \cdot v$. Impulsul forţei rezultante δF ce acţionează asupra porţiunii de bară perturbată este $H = \delta F \cdot t$. Expresia forţei δF rezultă din legea lui Hooke: $\delta F = ES\dfrac{\Delta l}{l_0} = ES\dfrac{vt}{ct}$. Prin urmare $H = ES\dfrac{v}{c}t$ şi aplicând teorema variaţiei impulsului $H = \Delta p$ rezultă $c = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$.

⋆2.1.9 Dacă la $t = 0$ coarda este orizontală şi tensionată, într-o secţiune oarecare a corzii tensiunea fiind T, iar asupra ei se aplică transversal o forţă F, la un moment ulterior oarecare t imaginea corzii este cea din Fig. 2.1.9R.

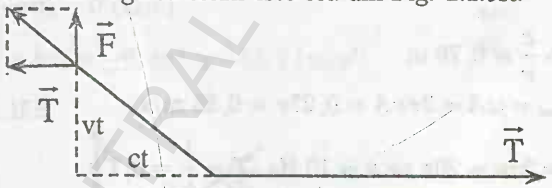


Fig. 2.1.9R

Forţa F are rolul de a pune în mişcare o porţiune de coardă cu masa din ce în ce mai mare. Cum forţa reprezintă variaţia în timp a impulsului, putem presupune că acesta se modifică ca urmare a modificării masei şi nu a vitezei. Prin urmare putem presupune că viteza v a porţiunii de coardă în mişcare este constantă. Din triunghiurile asemenea din figură deducem că: $\dfrac{F}{T} = \dfrac{vt}{ct}$ sau $F = T\dfrac{v}{c}$. Aşadar impulsul forţei transversale F este $H = Ft = T\dfrac{v}{c}t$. Variaţia impulsului porţiunii de coardă aflată în mişcare este $\Delta p = \Delta m \cdot v = \mu ctv$. Din teorema variaţiei impulsului $H = \Delta p$ deducem expresia vitezei de propagare a undei transversale în coardă: $c = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$.

⋆2.1.10 Porţiunea de coardă care se mişcă pe cerc cu viteza c (Fig. 2.1.10R) are masa

$\Delta m = \mu \Delta l = \mu R \cdot 2\theta$ şi asupra ei acţionează forţa centripetă:

$$F_{cp} = \frac{\Delta m \cdot c^2}{R} = 2\mu\theta c^2$$

Pe de altă parte, rezultanta celor două forţe de tensiune este tot forţa centripetă:

$$F_{cp} = 2T \sin\theta = 2T\theta$$

perturbaţia fiind mică. Din cele două expresii pentru forţa centripetă rezultă viteza de propagare a undei transversale în coardă:

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

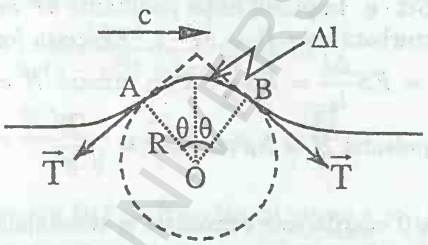


Fig. 2.1.10R

2.1.11 a) $\lambda = \dfrac{c}{\nu} = 0,76$ m

b) $v_{\max} = \omega A = 2\pi\nu A = 0,27\pi = 0,85$ m/s

2.1.12 a) $\omega = 2\pi\nu = 20\pi \Rightarrow \nu = 10$ Hz. $T = \dfrac{1}{\nu} = 0,1$ s.

b) $\lambda = \dfrac{c}{\nu} = 5$ cm.

c) $\Delta\varphi = k\Delta x = \dfrac{2\pi}{\lambda}\Delta x = 2\pi$ (punctele oscilează în fază).

d) $\Delta x = \dfrac{\lambda}{2\pi}\Delta\varphi = \dfrac{5}{12}$ cm $\simeq 0,4$ cm.

e) $t = \dfrac{x}{c} = 0,6$ s.

2.1.13 a) $\omega = 2\pi\nu = 500 \Rightarrow \nu = \dfrac{250}{\pi}$ Hz $\simeq 79,6$ Hz.

$T = \dfrac{1}{\nu} = \dfrac{\pi}{250}$ s$= 4\pi$ ms$\simeq 12,6$ ms.

b) Din enunţ $kx = 0,5 \Rightarrow k = 0,1$ m^{-1}; $c = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{500}{0,1} = 5000$ (m/s);

$\rho = \dfrac{E}{c^2} = 3000$ kg/m^3.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

c) $\lambda = \dfrac{2\pi}{k} = 20\pi \simeq 62,8$ (m).

d) $\xi = 2\cos(500t - kx') = 2\cos(500t - 0,1)$ [mm].

$\Delta\varphi = 0,4$ rad$\simeq 22^0 55' 06''$.

e)

$$\begin{aligned}\langle w\rangle &= \left\langle \frac{dW}{dV}\right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}\frac{dm}{dV}\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}\frac{dm}{dV}\omega^2\xi^2\right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{1}{2}\rho\left[A^2\omega^2\sin^2(\omega t - kx) + A^2\omega^2\cos^2(\omega t - kx)\right]\right\rangle = \\ &= \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 = 1500J.\end{aligned}$$

Observaţie: Intensitatea undei este conform definiţiei $I = \dfrac{dW}{dtdS} = c\langle w\rangle = \frac{1}{2}\rho c(\omega A)^2 \equiv \frac{1}{2}Zv_{\max}^2$, unde Z este impedanţa mediului, iar $v_{\max}$ este viteza maximă de oscilaţie a particulelor în jurul poziţiilor lor de echilibru.

2.1.14

$$\xi = A\cos(\omega t - kx) = A\cos\left(2\pi\nu t - \frac{2\pi\nu}{c}x\right) = 0,1\cos(8\pi - 8\pi) = 0,1 \text{ (m)}$$

$\dot{\xi} = -\omega A\sin(\omega t - kx) = 0$ (m/s).

$\ddot{\xi} = -\omega^2 A\cos(\omega t - kx) = -6,4\pi^2 \simeq -63,2$ (m/s^2).

2.1.15 Conform Fig. 2.1.15R

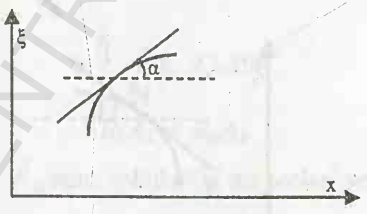


Fig. 2.1.15R

$$tg\alpha = \left|\frac{\partial\xi}{\partial x}\right| = \left|\frac{\partial}{\partial x}\left[Ae^{i(\omega t - kx)}\right]\right| = |-ik\xi| = \left|\frac{\omega}{c}\xi\right| = \frac{v}{c}$$

Alternativ, folosind partea reală a lui ξ:

$$\psi = \mathrm{Re}\,\xi = A\cos(\omega t - kx)$$

obţinem:

$$tg\alpha = \frac{\partial\psi}{\partial x} = -kA\sin(\omega t - kx) = -\frac{\omega}{c}A\sin(\omega t - kx) = \frac{v}{c}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2.1.16 a) Tensiunea din coardă într-un punct este egală cu greutatea bucăţii de coardă situată sub punctul respectiv (Fig. 2.1.16R)

$$T(y) = \frac{m}{l} g y$$

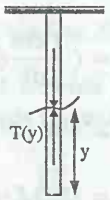


Fig. 2.1.16R

Viteza undei transversale în acel punct este

$$c(y) = \sqrt{\frac{T(y)}{\mu}} = \sqrt{gy}$$

b) $\int_0^\tau dt = \int_0^l \frac{dy}{v(y)} \Rightarrow \tau = 2\sqrt{\frac{l}{g}}.$

2.1.17 Utilizând Fig. 2.1.17R avem

$$\begin{aligned} dL &= F d\xi \cos\alpha = F d\xi \sin\beta \cong F d\xi tg\beta = F\frac{\partial \xi}{\partial x} d\xi = F\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial t} dt \\ &= F\left[kA\sin(\omega t - kx)\right] \cdot \left[-\omega A \sin(\omega t - kx)\right] dt \\ &= -k\omega A^2 F \sin^2(\omega t - kx)\, dt \end{aligned}$$

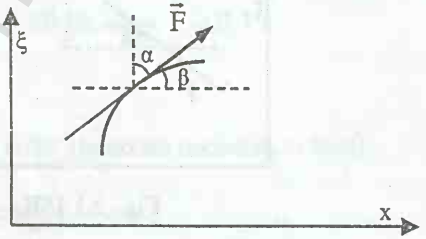


Fig. 2.1.17R

de unde

$$L = \int_t^{t+T} dL = -k\omega A^2 F \frac{T}{2} = -\frac{2\pi^2 A^2 \nu F}{c}$$

2.1.18 Ţinând cont că tensiunea în coardă şi frecvenţa sunt acceleaşi în ambele regiuni ale coardei, conservarea intensităţii undei în cele două regiuni ale coardei se scrie

$$\frac{1}{2}\sqrt{T\mu_1}\omega^2 A_1^2 = \frac{1}{2}\sqrt{T\mu_2}\omega^2 A_2^2$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

De aici rezultă

$$A_2 = A_1 \sqrt[4]{\frac{\mu_1}{\mu_2}}$$

Observaţie: Expresia $\sqrt{T\mu} = Z$ din (1) este impedanţa caracteristică a coardei. Expresia intensităţii undei transversale într-o coardă elastică se poate deduce similar ca în rezolvarea problemei 2.1.13, numai că în acest caz este vorba de energia unităţii de lungime a coardei supusă perturbaţiei.

2.1.19 Din definiţia intensităţii unei unde sferice rezultă:

$$I = \frac{P}{4\pi R^2} = \frac{1}{2} Z\omega^2 A^2$$

Prin urmare

$$RA = const$$

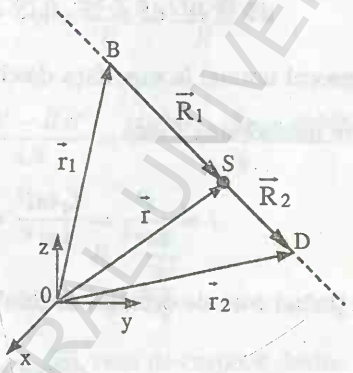


Fig. 2.1.19R

Conform Fig. 2.1.19R

$$R_1 A_1 = R_2 A_2$$

Deoarece vectorii $\vec{R}_1$ şi $\vec{R}_2$ sunt coliniari şi au acelaşi sens putem scrie relaţia de mai sus vectorial

$$A_1 \vec{R}_1 = A_2 \vec{R}_2 \tag{1}$$

Din aceeaşi figură se vede că

$$\vec{R}_1 = \vec{r} - \vec{r}_1 \tag{2}$$

şi

$$\vec{R}_2 = \vec{r}_2 - \vec{r} \tag{3}$$

Din (1)-(3) găsim

$$\vec{r} = \frac{A_1 \vec{r}_1 + A_2 \vec{r}_2}{A_1 + A_2}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2.1.20 Considerând un element de arie dS din interiorul deschiderii circulare, aflat la distanţa r de sursa S (Fig. 2.1.20R) fluxul elementar al intensităţii undei prin acesta este:

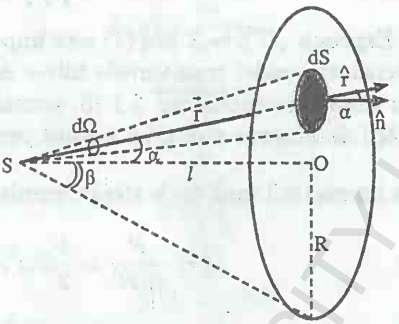


Fig. 2.1.20R

$$d\Phi = I\hat{r}\cdot\overrightarrow{dS} = I\hat{r}\cdot\hat{n}dS = IdS\cos\alpha \tag{1}$$

unde $\hat{n}$ este versorul normal la suprafaţa deschiderii.

Pe de altă parte intensitatea I este

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{I_0 4\pi l^2}{4\pi r^2} = I_0\frac{l^2}{r^2} \tag{2}$$

Din (1) şi (2), ţinând cont de definiţia unghiului solid

$$d\Omega = \frac{dS\cos\alpha}{r^2}$$

rezultă

$$\Phi = \int_S d\Phi = I_0 l^2\int_S d\Omega = 2\pi l^2 I_0\int_0^\beta \sin\alpha d\alpha = 2\pi l^2 I_0\,(1-\cos\beta)$$

$$= 2\pi l^2 I_0\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{l}\right)^2}}\right) = 2\cdot 10^{-5}\ \text{W}$$

⋆2.1.21 Să presupunem că la $t = 0$ valul face un unghi α cu malul. Altfel spus, raza face un unghi α cu perpendiculara la ţărm, deoarece raza este perpendiculară pe val (suprafaţa de undă). Să considerăm la acest moment de timp un element de rază de lungime AB=dy, centrul de curbură fiind notat cu C în Fig. 2.1.21R.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

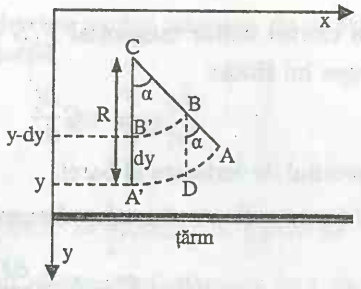


Fig. 2.1.21R

Datorită curburii razei ca efect al gradientului vitezei, după un element de timp dt poziţia elementului AB este A'B', unghiul de curbură fiind α. Utilizând notaţiile din figură putem scrie:

$$\alpha = \frac{AA'}{R} = \frac{c(y)dt}{R} \tag{1}$$

Pe de altă parte

$$\alpha = \frac{AD}{AB} = \frac{AA' - BB'}{AB} = \frac{c(y)dt - c(y-dy)dt}{dy} = \frac{dc}{dy}dt \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă că

$$R = \frac{c}{\frac{dc}{dy}} \tag{3}$$

În cazul nostru, deoarece $c = \sqrt{gy}$, raza de curbură devine $R = 2y$.

⋆2.1.22 Calculul vitezei undelor de forfecare:

Fie o bară circulară iniţial orizontală [profilul punctat din Fig. 2.1.22R (a)]. Lovind-o transversal, bara se deformează, aşa cum este indicat în figură.

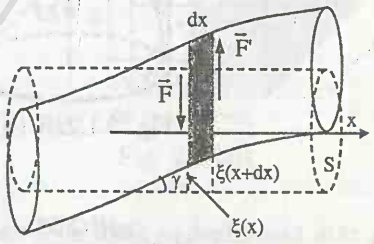


Fig. 2.1.22R (a)

Considerând un element de masă, ca cel haşurat în figură, acesta se va deplasa transversal pe distanţa ξ, măsurată în planul secţiunii din stânga, aflată în dreptul coordonatei x. Dacă notăm cu S aria secţiunii transversale a barei,

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

legătura dintre efortul unitar tangenţial F/S şi unghiul de forfecare $\gamma = \dfrac{\partial \xi}{\partial x}$ este dată de legea lui Hooke

$$\frac{F}{S} = G\frac{\partial \xi}{\partial x} \tag{1}$$

unde G este modulul de forfecare al barei.

Forţa rezultantă care acţionează asupra elementului de masă este

$$dF = F' - F = \frac{\partial F}{\partial x}dx \tag{2}$$

Ecuaţia de mişcare a elementului de masă este dată de principiul al doilea al lui Newton

$$dF = dm\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \rho S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \tag{3}$$

Din (1)-(3) rezultă

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \tag{4}$$

care este tocmai ecuaţia undei de forfecare în bară, viteza de propagare a acesteia fiind

$$c_{forfecare} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \tag{5}$$

Calculul vitezei undelor de torsiune:

Considerând un element de masă de grosinme dx, după cum se ştie de la studiul deformaţiei de torsiune, momentul de torsiune este [Fig. 2.1.22R (b)]:

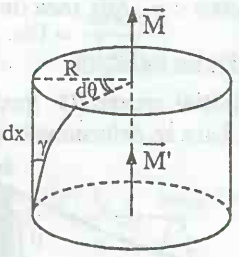


Fig. 2.1.22R (b)

$$M = \frac{\pi R^4 G}{2}\frac{\partial \theta}{\partial x} \tag{6}$$

unde θ este unghiul de torsiune.

Momentul rezultant care acţionează asupra elementului de masă este

$$dM = M' - M = \frac{\partial M}{\partial x}dx \tag{7}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Principiul al doilea al lui Newton pentru mişcarea de rotaţie, scris pentru elementul de masă dm arată astfel

$$dM = dI\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} \tag{8}$$

unde

$$dI = \frac{1}{2}dmR^2 = \frac{1}{2}\rho S dx R^2 = \frac{1}{2}\rho\pi R^4 dx \tag{9}$$

este momentul de inerţie al elementului de masă faţă de axa de simetrie a cilindrului.

Din (6)-(9) rezultă tocmai ecuaţia undei de torsiune în bară

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \tag{10}$$

Viteza de propagare a undei de torsiune este

$$c_{torsiune} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \tag{11}$$

Din (5) şi (11) se observă că cele două viteze sunt egale.

⋆2.1.23 Să considerăm o porţiune de lichid de grosime L şi să delimităm în aceasta un element de masă (Fig. 2.1.23R).

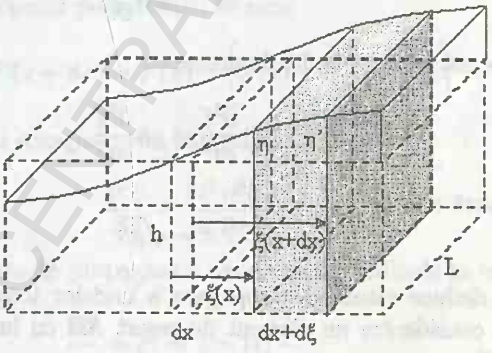


Fig. 2.1.23R

Sub acţiunea undei elementul de masă se deplasează atât pe orizontală, cât şi pe verticală. Lichidul fiind practic incompresibil, din figură rezultă

$$\begin{aligned} Lhdx &= L(h+\eta)(dx+d\xi) = Lhdx\left(1+\frac{\eta}{h}\right)\left(1+\frac{d\xi}{dx}\right) \\ &\simeq Lhdx\left(1+\frac{\eta}{h}+\frac{d\xi}{dx}\right) \end{aligned}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

sau

$$\eta = -h\frac{d\xi}{dx} \tag{1}$$

Deoarece suprafaţa lichidului perturbat nu este orizontală, presiunea de pe fiecare din feţele elementului de masă nu va fi aceeaşi. Prin urmare, asupra elementului de masă va acţiona o forţă netă

$$dF = [p(x) - p(x+dx)]\,Lh = -Lh\frac{\partial p}{\partial x}dx \tag{2}$$

Diferenţa de presiune dintre cele două feţe este însă

$$dp = \rho g(\eta' - \eta) = \rho g\frac{\partial \eta}{\partial x}dx$$

sau, utilizând (1)

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\rho g h\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \tag{3}$$

Introducând (3) în (2) găsim

$$dF = \rho g h^2 L\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}dx = dm \cdot gh\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \tag{4}$$

Comparând (4) cu ecuaţia principiului al doilea al lui Newton

$$dF = dm\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \tag{5}$$

rezultă tocmai ecuaţia undei de maree

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = gh\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \tag{6}$$

a cărei viteză este

$$c = \sqrt{gh} \tag{7}$$

⋆2.1.24 Pentru a deduce viteza de propagare a undelor longitudinale într-un resort elastic să considerăm un element de resort AB cu lungimea iniţială dx [Fig. 2.1.24R(a)].

Sub acţiunea perturbaţiei se vede că alungirea relativă a acestuia este

$$\frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{\{[x + dx + \xi(x+dx)] - [x + \xi(x)]\} - [(x+dx) - x]}{(x+dx) - x}$$

$$= \frac{\xi(x+dx) - \xi(x)}{dx} = \frac{\xi(x) + \dfrac{\partial \xi}{\partial x}dx + \ldots - \xi(x)}{dx} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \tag{2}$$

unde ξ este deplasarea secţiunii ca urmare a acţiunii perturbaţiei.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

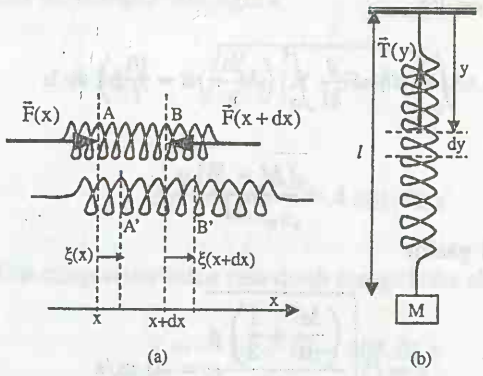


Fig. 2.1.24R

Atunci forţa care apare la nivelul secţiunii de coordonată x este

$$F(x) = -kl\frac{\partial \xi}{\partial x} \tag{2}$$

unde k este constanta elastică a resortului.

Masa secţiunii AB a resortului este

$$dm = \frac{m}{l}dx \tag{3}$$

Ecuaţia principiului al doilea al lui Newton pentru mişcarea secţiunii AB a resortului ca urmarea a acţiunii perturbaţiei se scrie

$$dm\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = F(x) - F(x+dx) = F(x) - \left[F(x) + \frac{\partial F}{\partial x}dx + ...\right] = -\frac{\partial F}{\partial x}dx$$

Din (2)-(4) rezultă tocmai ecuaţia undei longitudinale în resort

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{kl^2}{m}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \tag{5}$$

Din (5) reiese tocmai viteza de propagare a undelor longitudinale în resort

$$\frac{kl^2}{m} = c^2 \Rightarrow c = l\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{6}$$

Pentru a afla constanta elastică a resortului trebuie găsită o relaţie între alungirea resortului sub acţiunea masei suspendate la extremitatea lui, precum şi a propriei greutăţi. Delimitând o porţiune de resort cu lungimea dy [Fig. 2.1.24R(b)] se poate scrie

$$F(y) = kl\frac{\partial \eta}{\partial y} \tag{7}$$

Pe de altă parte

$$F(y) = Mg + \frac{m}{l}g(l-y) \tag{8}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Din (7) şi (8) rezultă

$$\int_0^{\Delta l} d\eta = \frac{g}{kl}\int_0^{l}\left(M+m-\frac{m}{l}y\right)dy$$

de unde

$$k = \frac{\left(M+\frac{m}{2}\right)g}{\Delta l} \tag{9}$$

Introducând (9) în (6) găsim

$$c = l\sqrt{\frac{\left(\frac{M}{m}+\frac{1}{2}\right)g}{\Delta l}} = 40 \text{ m/s} \tag{10}$$

Din (9) se observă că, în cazul în care $M \gg m$, masa resortului nu mai are practic nici o influenţă în calculul alungirii acestuia.

2.2 Reflexia şi refracţia undelor

2.2.1 a) $\nu_2 = \nu_1$, deoarece la refracţie, ca şi la reflexie frecvenţa undei nu se modifică.

b) $\lambda_1 = \frac{c_1}{\nu_1}$; $\lambda_2 = \frac{c_2}{\nu_1}$

2.2.2 a) $d = v_p t_1 = v_s t_2 \Rightarrow \Delta t = t_2 - t_1 = d\frac{v_p - v_s}{v_p v_s} \Rightarrow d = \Delta t \frac{v_p v_s}{v_p - v_s} = 2160$ km

b) Conform Fig. 2.2.2R

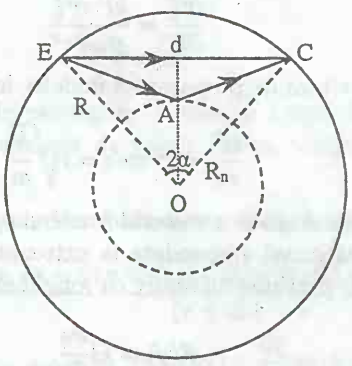


Fig. 2.2.2R

$$d = 2R\sin\alpha \Rightarrow 2\alpha = 2\arcsin\frac{d}{2R} = 19^0 31' 22'' = 0,34 \text{ rad}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

c) Ţinând cont de notaţiile din figură

$$d' = 2EA = 2\sqrt{\frac{d^2}{4} + (R - R_n)^2} = 6189,15 \text{ km}$$

deci

$$\Delta t' = d' \frac{v_p - v_s}{v_p v_s} = 601,72 \text{ s}$$

d) Intervalul de timp scurs între cele două înregistrări ale undelor P este

$$\tau = \frac{1}{v_p}(d' - d) = 503,64 \text{ s}$$

⋆2.2.3 Componenta transversală a tensiunii este

$$T \sin\alpha \simeq T tg\alpha = T\frac{\partial \xi}{\partial x} = T\frac{v}{c} = T\frac{v}{\sqrt{\frac{T}{\mu}}} = \sqrt{T\mu}v = Zv$$

de unde

$$Z = \frac{T}{c} = \mu c = \sqrt{T\mu}$$

Am utilizat aici rezultatul problemei 2.1.15 conform căruia $\dfrac{\partial \xi}{\partial x} = \dfrac{v}{c}$

⋆2.2.4 Să considerăm punctul de joncţiune al coardelor situat în punctul de coordonată $x = 0$, aşa cum este indicat în Fig. 2.2.4R.

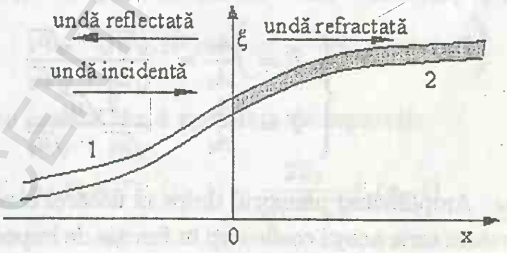


Fig. 2.2.4R

Ecuaţiile care descriu cele trei unde: incidentă, reflectată şi transmisă (refractată) sunt:

$$\xi_i(x,t) = A_i e^{i(\omega t - k_1 x)}$$

$$\xi_r(x,t) = A_r e^{i(\omega t + k_1 x)}$$

şi

$$\xi_t(x,t) = A_t e^{i(\omega t - k_2 x)}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Punctul de joncţiune aparţine ambelor coarde, prin urmare deplasarea verticală a lor în acest punct este aceeaşi

$$\xi_i(0,t)+\xi_r(0,t)=\xi_t(0,t)$$

sau

$$A_i+A_r=A_t \tag{1}$$

Deoarece pantele făcute de ambele corzi cu axa $0x$ au aceeaşi valoare în punctul de joncţiune (dacă cele două corzi nu se dezlipesc una de cealaltă)

$$\left.\frac{\partial(\xi_i+\xi_r)}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial\xi_t}{\partial x}\right|_{x=0}$$

sau

$$k_1(A_i-A_r)=k_2A_t \tag{2}$$

Rezolvând sistemul de ecuaţii (1)-(2) găsim

$$\begin{cases} A_r = A_i\dfrac{k_1-k_2}{k_1+k_2} \\ A_t = A_i\dfrac{2k_1}{k_1+k_2} \end{cases} \tag{3}$$

Din dependenţa

$$k=\frac{\omega}{c}=\frac{\omega}{\sqrt{\frac{F}{\mu}}}=\frac{\omega}{\sqrt{F}}\sqrt{\mu}$$

ecuaţiile (3) dau coeficientul de reflexie R, respectiv de transmisie T

$$\begin{cases} R=\dfrac{A_r}{A_i}=\dfrac{\sqrt{\mu_1}-\sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1}+\sqrt{\mu_2}} \\ T=\dfrac{A_t}{A_i}=\dfrac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1}+\sqrt{\mu_2}} \end{cases} \tag{3'}$$

Observaţie: Amplificând membrul drept al fiecărei ecuaţii din sistemul (3') cu $\sqrt{F}$ mai putem scrie aceşti coeficienţi în funcţie de impedanţele celor două medii (coarde)

$$\begin{cases} R=\dfrac{Z_1-Z_2}{Z_1+Z_2} \\ T=\dfrac{2Z_1}{Z_1+Z_2} \end{cases} \tag{3"}$$

Acestea sunt formulele lui Fresnel.

⋆2.2.5 Reflexia se face cu salt de fază în cazul în care coeficientul de reflexie, care are expresia

$$R=\frac{Z_1-Z_2}{Z_1+Z_2}$$

BCU IAŞI CENTRALĂ UNIVERSITY LIBRARY

este negativ, ceea ce înseamnă că $Z_1 < Z_2$. În această situaţie expresia undei reflectate se poate scrie

$$\xi_r = RAe^{i(\omega t + kx)}$$

Cum

$$-1 = e^{\pm i\pi}$$

expresia de mai sus ia forma

$$\xi_r = |R|\, Ae^{i(\omega t + kx \pm \pi)}$$

Prin urmare, dacă impedanţa primului mediu este mai mică decât impedanţa mediului al doilea, unda reflectată suferă un salt de fază egal cu π faţă de unda incidentă. Nu se poate spune însă dacă saltul de fază se face în avans sau în devans faţă de faza undei incidente!

2.2.6 Expresia oscilaţiilor produse de sursă este

$$\xi(0,t) = \cos\omega t + B\sin\omega t$$

fiind de forma

$$\xi(0,t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Făcând identificările găsim

$$\xi(0,t) = \sqrt{1+B^2}\cos(\omega t - arctgB)$$

Expresia undei incidente la nivelul suprafeţei de separaţie este

$$\begin{aligned}\xi_i(x_1,t) &= \sqrt{1+B^2}\cos(\omega t - kx_1 - arctgB)\\ &= \sqrt{1+B^2}\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c_1}x_1 - arctgB\right)\end{aligned}$$

iar a undei refractate imediat după suprafaţa de separaţie

$$\xi_t(x_1,t) = T\xi_i(x_1,t) = \frac{2Z_1}{Z_1+Z_2}\xi_i(x_1,t)$$

Din enunţ însă

$$\rho_1 c_1 = \rho_2 c_2 \Leftrightarrow Z_1 = Z_2$$

atunci

$$\xi_r(x_1,t) = \xi_i(x_1,t)$$

În fine, la distanţa x_2 de suprafaţa de separaţie

$$\xi_r(x_1+x_2,t) = \sqrt{1+B^2}\cos\left(\omega t - \frac{x_1}{c_1}\omega - \frac{x_2}{c_2}\omega - arctgB\right)$$

BCU IAŞI / CENTRALA UNIVERSITARĂ / LIBRARY

2.3 Interferenţa undelor

2.3.1

$$A_1 = A_2 = \frac{A}{\sqrt{2\,(1+\cos\Delta\varphi)}} = 5\frac{\sqrt{3}}{3}\ \text{cm} \simeq 2,9\ \text{cm}$$

$$\xi_1 = A_1 e^{i(2000\pi t - \pi x)}$$

$$\xi_2 = A_2 e^{i\left(2000\pi t - \pi x \pm \frac{\pi}{3}\right)}$$

2.3.2 $c = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}} = 3\ \text{m/s}$

a) $\lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{c}{\nu} = \dfrac{3\ \text{m/s}}{300\ \text{Hz}} = 1\ \text{cm}$

b) $\Delta\varphi = k\Delta x = \pi$. Aşadar în punctul considerat se formează un minim de interferenţă.

c) $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi} \simeq 6,8\ \text{mm}$

$$\begin{aligned} tg\varphi_0 &= \frac{A_1\sin\varphi_{01} + A_2\sin\varphi_{02}}{A_1\cos\varphi_{01} + A_2\cos\varphi_{02}} \\ &= \frac{4\sin 10\pi + 3\sin 9\pi}{4\cos 10\pi + 3\cos 9\pi} = 0 \end{aligned}$$

de unde

$$\varphi_0 = 0\ \text{rad}$$

deci

$$\varphi = 600\pi t$$

2.3.3 a) $\lambda = \dfrac{c}{\nu} = 5\ \text{mm}$

b) $A_1 = A\sqrt{2\,(1+\cos\Delta\varphi)} = 0$

c) $\Delta\varphi = kd\,(2 - ctg30^0) \pm \pi \simeq (17 \pm 1)\,\pi = 16\pi$ sau 18π

$\cos\Delta\varphi = 1$, deci $A_2 = 2A = 4\ \text{mm}$

2.3.4 a) $\Delta\varphi = \pi \Rightarrow \cos\Delta\varphi = -1$, de unde $A_O = |A_1 - A_2| = 0$

b) $\Delta\varphi = kd \pm \pi = \pi\left(\dfrac{2\nu d}{c} \pm 1\right) = \dfrac{\pi}{2}$ sau $\dfrac{5}{2}\pi \Rightarrow \cos\Delta\varphi = 0$. Prin urmare $A' = A\sqrt{2} \simeq 0,8\ \text{mm}$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2.3.5 Diferenţa de fază dintre unda reflectată şi cea directă este

$$\Delta\varphi = k\,(x_2 - x_1)$$

În primul caz

$$\Delta\varphi = 2n\pi$$

iar

$$\begin{aligned} x_2 &= 2\sqrt{H^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{4H^2 + d^2} \\ x_1 &= d \end{aligned}$$

de unde

$$\sqrt{4H^2 + d^2} - d = n\lambda \tag{1}$$

În cazul al doilea

$$\Delta\varphi = (2n+1)\,\pi$$

iar

$$\begin{aligned} x_2 &= 2\sqrt{(H+h)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{4\,(H+h)^2 + d^2} \\ x_1 &= d \end{aligned}$$

de unde

$$\sqrt{4\,(H+h)^2 + d^2} - d = (2n+1)\,\frac{\lambda}{2} \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă:

$$\begin{aligned} \lambda &= 2\left(\sqrt{4\,(H+h)^2 + d^2} - \sqrt{4H^2 + d^2}\right) \\ &= 2d\left(\sqrt{1 + 4\frac{(H+h)^2}{d^2}} - \sqrt{1 + 4\frac{H^2}{d^2}}\right) \\ &\simeq 2d\left[\left(1 + 2\frac{(H+h)^2}{d^2}\right) - \left(1 + 2\frac{H^2}{d^2}\right)\right] \\ &= \frac{4}{d}\left[(H+h)^2 - H^2\right] = \frac{4h}{d}\,(h+2H) \\ &= \frac{8hH}{d}\left(1 + \frac{h}{2H}\right) \simeq \frac{8hH}{d} \end{aligned}$$

2.3.6 a) $A = |A_1 - A_2| = 0{,}05$ mm

b) $\Delta\varphi = k \cdot 2l = (2n-1)\,\pi \Rightarrow \nu_n = (2n-1)\,\dfrac{c}{16}$

Prin urmare: $\nu_1 = 10$ Hz, $\nu_2 = 30$ Hz, $\nu_3 = 50$ Hz, $\nu_4 = 70$ Hz.

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2.3.7 $E = \rho c^2$. Dar $d = \dfrac{\lambda}{2} = \dfrac{c}{2\nu}$, de unde $c = 2\nu d = 5320$ m/s. În aceste condiţii $E = 7,5 \cdot 10^{10}$ N/m^2

2.3.8 a) $\nu = 500$ Hz; $\lambda = \dfrac{c}{\nu} = \dfrac{1}{\nu}\sqrt{\dfrac{E}{\rho}} = 10$ m

b) $l = l_1 + l_2 = \dfrac{3,5\pi + 2,5\pi}{k} = \dfrac{6\pi}{\frac{\pi}{5}} = 30$ m

c) $\Delta\varphi = \pi \Leftrightarrow$ minim!

d) $A = 1$ mm

e) $n = \dfrac{l}{\frac{\lambda}{2}} = 6$ fuse. Capetele fiind libere $\Rightarrow$ 7 ventre şi 6 noduri.

2.3.9 Utilizând reprezentarea fazorială soluţia este imediată.

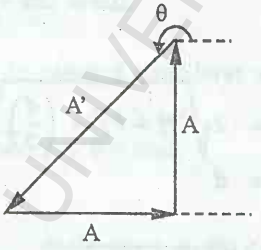


Fig. 2.3.9R

Din Fig. 2.3.9R rezultă

$$A' = A\sqrt{2}$$

şi

$$\theta = \frac{5\pi}{4}$$

2.3.10 $W = \dfrac{\lambda}{2} S \langle w \rangle = \dfrac{\pi c}{\omega} S \cdot \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}\pi S Z \omega A^2$

2.3.11 Forţa elastică din resort este egală în orice moment cu componenta transversală a tensiunii din fir corespunzătoare punctului $x = 0$

$$K\Delta y = T_y|_{x=0} = T\frac{\partial \psi}{\partial x}\bigg|_{x=0}$$

Lucrând cu numere complexe ($\psi = \mathrm{Re}\,\xi$) avem

$$K\left(Be^{i\omega t} + Ae^{i(\omega t+\varphi)}\right) = T(-ik)\,Ae^{i(\omega t - kx+\varphi)}\Big|_{x=0} \equiv -iZ\omega Ae^{i(\omega t+\varphi)}$$

sau

$$K\left(B + Ae^{i\varphi}\right) = -iZ\omega Ae^{i\varphi} \qquad (1)$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

deoarece

$$Z = \mu c = \sqrt{T\mu} = \frac{T}{c}$$

iar

$$k = \frac{\omega}{c}$$

a) Separând partea imaginară din (1) găsim

$$tg\varphi = -\frac{Z\omega}{K}$$

b) Separând partea reală din (1) rezultă

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{\cos\varphi} = \sqrt{1 + \left(\frac{Z\omega}{K}\right)^2}$$

Observaţie: Pentru $K \to \infty$ se vede că $\varphi \to 0$ şi $B/A \to 1$, ceea ce înseamnă că la înlocuirea resortului cu o bară rigidă oscilaţiile excitatorului sunt în fază cu cele ale extremităţii coardei, dar şi că amplitudinile de oscilaţie devin egale.

⋆2.3.12 a) Undele care apar ca fiind reflectate la nivelul primei interfeţe sunt undele notate cu α şi β în Fig. 2.3.12R.

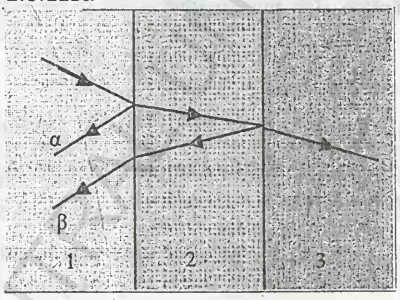


Fig. 2.3.12R

Condiţia din enunţ cere ca unda incidentă să fie practic transmisă atât la nivelul primei interfeţe, cât şi la a doua. Prin urmare, utilizând formulele lui Fresnel

$$\begin{cases} R_{12} = \dfrac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \\ T_{12} = \dfrac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \end{cases} \tag{1}$$

găsim că T_{12}, precum şi T_{23} să fie aproximativ egale cu unitatea şi că

$$Z_1 \simeq Z_2 \simeq Z_3$$

Pentru a găsi o relaţie mai exactă între cele trei impedanţe vom analiza formula care dă amplitudinea undei rezultate prin interferenţa undelor α şi β

$$A^2 = A_\alpha^2 + A_\beta^2 + 2A_\alpha A_\beta \cos\Delta\varphi$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pentru ca această amplitudine să fie nulă trebuie ca

$$\begin{cases} A_\alpha = & A_\beta \\ \Delta\varphi = & \pi \end{cases} \tag{2}$$

Prima condiţie se scrie

$$A_i R_{12} = A_i T_{12} R_{23} T_{21}$$

sau

$$R_{12} = R_{23}$$

deoarece am văzut că cei doi coeficienţi de transmisie sunt egali practic cu unitatea.

Utilizând ecuaţia primului coeficient Fresnel din ec. (1) găsim

$$Z_2 = \sqrt{Z_1 Z_3}$$

b) A doua condiţie (2) se scrie

$$\Delta\varphi = \pi = 2k_2 L$$

deoarece unda β parcurge un drum suplimentar egal cu $2L$, unde L este grosimea mediului al doilea. De aici rezultă

$$L = \frac{\lambda_2}{4}$$

unde λ_2 este lungimea de undă a undei în mediul al doilea.

Prin urmare, la prima interfaţă nu va exista undă reflectată dacă al doilea mediu este o lamă sfert de undă.

⋆2.3.13 a) De îndată ce corpul cu masa M este pus în oscilaţie în resort se vor propaga unde care se vor reflecta în punctul de susţinere al resortului, dând ca rezultat unde staţionare

$$\psi(y,t) = A\cos\omega t\cos(ky+\alpha)$$

Alegând axa $0y$ de-a lungul resortului, cu sensul pozitiv înspre corpul cu masa M şi cu originea în punctul de susţinere al resortului care este un nod al undelor staţionare

$$\psi(0,t) = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{2}$$

şi deci

$$\psi(y,t) = A\cos\omega t\sin ky \tag{1}$$

Ecuaţia de mişcare pentru corpul cu masa M se scrie

$$M\left.\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right|_{y=l} = -Kl\left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{y=l} \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă

$$M\omega^2\sin kl = Klk\cos kl \tag{3}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Deoarece

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{\omega}{l\sqrt{\frac{K}{m}}} = \frac{\omega}{l}\sqrt{\frac{m}{K}} \tag{4}$$

unde s-a făcut uz de rezultatul problemei 2.1.24, Ec. (3) devine

$$\omega\sqrt{\frac{m}{K}} \cdot tg\left(\omega\sqrt{\frac{m}{K}}\right) = \frac{m}{M} \tag{5}$$

Această ecuaţie este transcendentă. Dacă însă masa resortului este mică în comparaţie cu masa corpului suspendat, atunci reţinând primii doi termeni din dezvoltarea în serie Taylor a funcţiei $tg\theta \simeq \theta + \frac{1}{3}\theta^3 + \ldots$ ecuaţia (5) se rescrie

$$\frac{m\omega^2}{K}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{m\omega^2}{K}\right) = \frac{m}{M} \tag{6}$$

Dacă $\frac{m\omega^2}{K} << 1$, din (6) rezultă, în primă aproximaţie, că

$$\omega^2 = \frac{K}{M}$$

adică relaţia uzuală de la resorturile foarte uşoare.

Introducând această expresie în paranteza din ec. (6), în această a doua aproximaţie, rezultă

$$\omega^2 = \frac{K}{M + \frac{1}{3}m} \tag{7}$$

b) Deoarece toate spirele oscilează în fază înseamnă că acestea se află toate în interiorul unui singur fus al undelor staţionare. De fapt lungimea resortului formează o jumătate de fus, acesta având un singur capăt fixat

$$l + \Delta l = \frac{\lambda}{4}$$

de unde

$$k = \frac{\pi}{2(l + \Delta l)}$$

Conform rezolvării problemei 2.1.24

$$\Delta l = \frac{\left(M + \frac{m}{2}\right)g}{K} \tag{8}$$

Deoarece

$$c = \frac{\omega}{k} \equiv l\sqrt{\frac{K}{m}}$$

utilizând (7) şi (8) găsim

$$l = \frac{mg}{K} \cdot \frac{\frac{M}{m} + \frac{1}{2}}{\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{M}{m} + \frac{1}{3}} - 1}$$

B.C.U. „M. EMINESCU" IAŞI
BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

⋆2.3.14 a) Fiind vorba de unde staţionare cu un nod la mijlocul lacului şi ventre la cele două capate opuse $L = \frac{\lambda}{2}$, de unde $\lambda = 2L$.

b) Vom urmări variaţia energiei potenţiale a centrului de masă al apei lacului faţă de poziţia sa de echilibru. Mai întâi însă vom calcula poziţia centrului de masă (CM) al apei lacului în starea perturbată (Fig. 2.3.14R) faţă de poziţia de echilibru a nivelului liber al acesteia.

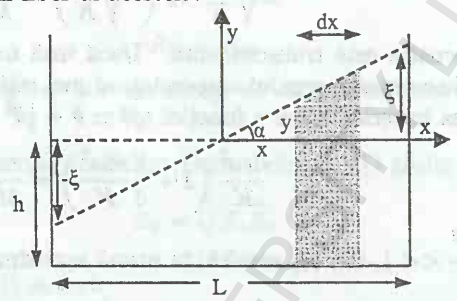


Fig. 2.3.14R

Pentru aceasta considerăm un element de masă $dm = \rho dV = \rho l(h+y)dx$ ca cel haşurat în figură, unde l este lăţimea lacului. Din figură rezultă că $tg\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\xi}{\frac{L}{2}}$, de unde $y = \frac{2\xi x}{L}$. Elementul de masă se scrie acum: $dm = \rho l(h + \frac{2\xi x}{L})dx = \rho l\frac{L}{2\xi}(h+y)dy$.

În aceste condiţii coordonatele CM sunt ($m = \rho lLh$):

- abscisa CM:

$$x_{CM} = \frac{1}{m}\int_V x dm = \frac{\rho l \int_{-L/2}^{L/2} x(h + \frac{2\xi x}{L})dx}{\rho lLh} = \frac{L}{6h}\xi \qquad (1)$$

- ordonata CM al volumului de apă perturbat

$$y_{1CM} = \frac{1}{m_1}\int_{V_1} y dm = \frac{\rho l\frac{L}{2\xi}\int_{-\xi}^{\xi} y(h+y)dy}{\rho lL\xi} = \frac{1}{3}\xi \qquad (2)$$

Ordonata CM va fi:

$$\begin{aligned} y_{CM} &= \frac{m_1 y_{1CM} + m_2 y_{2CM}}{m} \\ &= \frac{\rho lL\xi \cdot \frac{\xi}{3} + \rho lL\,(h-\xi)\left[-\left(h - \frac{h-\xi}{2}\right)\right]}{\rho lLh} \\ &= \frac{5}{6h}\xi^2 - \frac{h}{2} \end{aligned} \qquad (3)$$

BCU IASI / CENTRUL UNIVERSITAR LIBRARY

Faţă de starea de referinţă $\left(x_{0CM}=0;\ y_{0CM}=-\frac{h}{2}\right)$ coordonatele CM sunt

$$\left\{\begin{array}{lllll} X_{CM} & = & x_{CM}-x_{0CM} & = & \frac{L}{6h}\xi \\ Y_{CM} & = & y_{CM}-y_{0CM} & = & \frac{5}{6h}\xi^2 \end{array}\right. \tag{4}$$

În aceste condiţii energia potenţială este

$$E_p = mgY_{CM} = \frac{5mg}{6h}\xi^2 = \frac{1}{2}\kappa\xi^2 \tag{5}$$

unde

$$\kappa = \frac{5mg}{3h} \tag{6}$$

este constanta elastică echivalentă a oscilatorului.

Pentru calculul energiei cinetice este necesară mai întâi evaluarea vitezei CM

$$v_{CM}^2 = \dot{x}_{CM}^2 + \dot{y}_{CM}^2 = \frac{L^2}{36h^2}\left(1+100\frac{\xi^2}{L^2}\right)\dot{\xi}^2 \simeq \frac{L^2}{36h^2}\dot{\xi}^2 \tag{7}$$

deoarece $\xi \ll L$.

În aceste condiţii

$$E_c = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 = \frac{1}{2}\frac{mL^2}{36h^2}\dot{\xi}^2 = \frac{1}{2}\mu\dot{\xi}^2 \tag{8}$$

unde

$$\mu = \frac{mL^2}{36h^2} \tag{9}$$

este masa echivalentă a oscilatorului.

Din (6) şi (9), utilizând relaţia

$$\kappa = \mu\omega^2 \tag{10}$$

rezultă

$$\nu = \frac{\sqrt{15gh}}{\pi L} = \frac{5}{2\pi}\cdot 10^{-3}\ \text{Hz} \simeq 8\cdot 10^{-4}\ \text{Hz}$$

sau

$$T = \frac{1}{\nu} \simeq 1256,6\ \text{s} \simeq 21\ \text{min}$$

În aceste condiţii, viteza undelor staţionare este

$$c = \lambda\nu = \frac{2}{\pi}\sqrt{15gh} = \frac{300}{\pi}\ \text{m/s} \simeq 95,5\ \text{m/s} \tag{9}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2.4 Difracţia undelor

2.4.1 Dimensiunile ferestrei au acelaşi ordin de mărime cu lungimea de undă a undelor sonore ($\lambda \in [17\text{ mm}, 21\text{ m}]$), ceea ce permite producerea fenomenului de difracţie. Din această cauză muzica din cameră se aude şi dacă cel care o ascultă de afară nu se află în faţa ferestrei. În cazul luminii ($\lambda \in [380\text{ nm}, 780\text{ nm}]$) fenomenul de difracţie nu se produce deoarece dimensiunile ferestrei sunt mult mai mari decât lungimea de undă a undelor luminoase. Din acest motiv este necesar ca cel ce citeşte dintr-o carte, de exemplu, să stea în faţa ferestrei.

2.4.2 Din Fig. 2.4.2R(a) se vede că diferenţa de drum dintre cele două unde difractate care interferă este

$$\Delta r = d \sin\theta$$

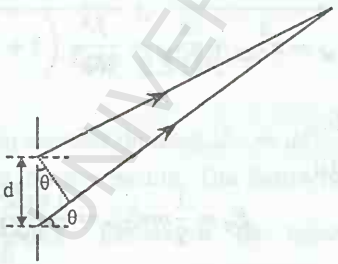


Fig. 2.4.2R (a)

Prin urmare diferenţa de fază dintre aceste două unde este

$$\Delta\varphi = k\Delta r = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta$$

Algebric, amplitudinea undei rezultate prin interferenţă este

$$A_0(\theta) = \sqrt{A^2 + A^2 + 2A \cdot A \cdot \cos\Delta\varphi} = 2A\cos\alpha$$

unde s-a notat

$$\alpha = \frac{\Delta\varphi}{2}$$

Geometric, utilizând reprezentarea Fresnel [Fig. 2.4.2R(b)], se deduce acelaşi rezultat ca mai sus.

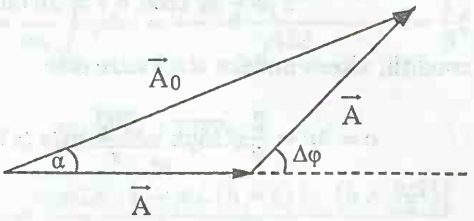


Fig. 2.4.2R (b)

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

b) Intensitatea undei rezultate prin interferenţă este

$$I = \frac{1}{2}\rho c\omega^2 A_0^2 = 2\rho c\omega^2 A^2 \cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2}$$

Maximele de interferenţă se obţin aşadar pentru

$$\cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2} = 1$$

ceea ce înseamnă că

$$\Delta\varphi = 2n\pi,\ n \in Z$$

sau

$$\sin\theta = \frac{n\lambda}{d} \in [-1, 1]$$

De aici rezultă că

$$n \in \left[-\frac{d}{\lambda}, \frac{d}{\lambda}\right] \cap Z$$

sau

$$Card\left(\{n\}\right) = 2\left[\frac{d}{\lambda}\right] + 1$$

unde $[*]$ este partea întreagă a lui $*$, iar $Card(\{*\})$ este cardinalul, sau numărul elementelor mulţimii $\{*\}$.

c) Intensitatea maximului central se obţine pentru $n = 0 \Rightarrow \theta_{0M} = 0$.

Minimele se realizează pentru

$$\cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2} = 0$$

sau

$$\Delta\varphi = (2n+1)\pi,\ n \in Z$$

Prin urmare, primul minim se va obţine pentru $n = 0 \Rightarrow \Delta\varphi = \pi \Rightarrow \theta_{0m} = \arcsin\frac{\lambda}{2d}$. de fapt, vor fi două minime de ordin zero situate simetric de o parte şi de alta a maximului central.

Distanţa unghiulară dintre maximul central şi primul minim va fi

$$\Delta\theta = \theta_{0m} - \theta_{0M} = \arcsin\frac{\lambda}{2d}$$

2.4.3 Valoarea maximă a amplitudinii se obţine în maximul central

$$A_M(0) = 2A$$

Pentru maximul $A_M(\theta) > \frac{2}{\pi}A_M(0)$ rezultă

$$\cos\left(\frac{\pi}{\lambda}d\sin\theta\right) > \frac{2}{\pi}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

sau

$$\theta < \theta_1 = \arcsin\left(\frac{\lambda}{\pi d}\arccos\frac{2}{\pi}\right) \simeq 0,14 \text{ rad} \simeq 8^0$$

Aşadar intervalul unghiular cerut este

$$\Delta\theta = 2\theta_1 = 0,28 \text{ rad} = 16^0$$

2.4.4 Distanţa dintre cele două minime m_1 şi m_{-1} (Fig. 2.4.4R) este

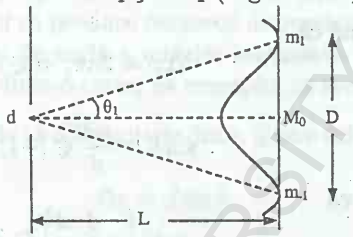


Fig. 2.4.4R

$$D = 2Ltg\theta_1$$

Pentru minimul de ordinul întâi θ_1 este dat de

$$\theta_1 = \arcsin\frac{\lambda}{2d}$$

de unde

$$D = \frac{2L\lambda}{\sqrt{4d^2 - \lambda^2}} = 750 \text{ m}$$

2.5 Absorbţia undelor

2.5.1

$$A(r) = \frac{A_0}{r}e^{-\gamma r}$$

Din enunţ

$$A_2 = (1 - \eta)\, A_1$$

Atunci

$$r_2 = \frac{r_1}{1 - \eta}e^{-\gamma(r_2 - r_1)} \qquad (1)$$

Deoarece

$$\Delta\varphi = k\,(r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda}\,(r_2 - r_1)$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

iar

$$\Delta\varphi = \pi$$

rezultă

$$r_2 - r_1 = \frac{\lambda}{2} \tag{2}$$

Din (1) şi (2) se deduce

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{\lambda}{2\left(\dfrac{e^{-\gamma\lambda/2}}{1-\eta} - 1\right)} = 50 \text{ m} \\ r_2 = \dfrac{\lambda}{2\left(1 - \dfrac{1-\eta}{e^{-\gamma\lambda/2}}\right)} = 50,25 \text{ m} \end{cases}$$

2.5.2 a)

$$\gamma = \frac{\ln\left(\dfrac{n}{p}\right)}{r_1(p-1)} = 0,08 \text{ m}^{-1}$$

b)

$$A_0 = A_1 r_1 \left(\frac{n}{p}\right)^{p-1} = 375 \ \mu\text{m}$$

2.5.3

$$\gamma = \frac{\ln\left(n\dfrac{r_1}{r_2}\right)}{r_2 - r_1} = 0,09 \text{ m}^{-1}$$

2.6 Dispersia undelor

2.6.1

$$v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} = ark^{r-1} = r\frac{\omega}{k} = rc$$

2.6.2 a) Suprafeţele de amplitudine constantă se deplasează cu viteza de grup, dată de formula lui Rayleigh: $v_g = c - \lambda\dfrac{dv}{d\lambda} = a\lambda + b - a\lambda = b$

b) Timpul Δt după care semnalul îşi recâştigă forma iniţială este dat de ecuaţia $\Delta\varphi = 2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$, unde $\varphi = \omega t - kx + \varphi_0$ este faza semnalului. Prin urmare $\omega\Delta t - k\Delta x = 2n\pi$, unde $\Delta x = v_g\Delta t$, iar $\omega = ck = c\dfrac{2\pi}{\lambda}$. De aici rezultă: $\dfrac{2\pi}{\lambda}\Delta t(c - v_g) = 2n\pi$, sau $\Delta t = \dfrac{n\lambda}{c - v_g} = \dfrac{n}{a}$.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

*2.6.3 a) Punctele succesive în care fazele $\varphi_1(x,t) = \omega_1 t - k_1 x$ şi $\varphi_2(x,t) = \omega_2 t - k_2 x$ sunt aceleaşi, la acelaşi moment de timp, sunt date de ecuaţiile: $\varphi_1(x_1,t) - \varphi_2(x_1,t) = 0$ şi $\varphi_1(x_2,t) - \varphi_2(x_2,t) = 2\pi$, sau

$$(\omega_1 - \omega_2)\, t - (k_1 - k_2)\, x_1 = 0 \tag{1}$$

şi

$$(\omega_1 - \omega_2)\, t - (k_1 - k_2)\, x_2 = 2\pi \tag{2}$$

Din (1) şi (2), prin eliminarea timpului, rezultă:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{2\pi}{k_2 - k_1} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

b) Diferenţiind (1): $(\omega_1 - \omega_2)\, dt - (k_1 - k_2)\, dx_1 = 0$ găsim că viteza cu care se deplasează un astfel de punct este tocmai viteza de grup:

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx_1}{dt} = v_g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} \\ &= \frac{c_1 k_1 - c_2 k_2}{k_1 - k_2} = \frac{c_1 \lambda_2 - c_2 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{aligned}$$

*2.6.4 a) Fie un sistem ortogonal de axe de coordonate $0xyz$, iar suprafaţa liberă a apei în repaus în planul $x0y$. Pentru a fixa ideile vom considera că mişcarea particulelor de fluid se execută doar în planul $y0z$.

Deoarece în lichid nu apar vârtejuri (curgerea este irotaţională)

$$\nabla \times \vec{v} = 0 \tag{1}$$

unde $\vec{v}$ este vitaza instantanee a particulei de fluid. Deoarece pentru orice câmp scalar Ψ, $\nabla \times (\nabla \Psi) = 0$, rezultă că

$$\vec{v} = -\nabla \Psi \tag{2}$$

unde Ψ poartă numele de potenţialul vitezei. În acest caz curgerea se numeşte potenţială, iar datorită coordonatelor alese $\Psi = \Psi(y,z,t)$.

Deoarece lichidul este incompresibil ($\rho = const$), ecuaţia de continuitate, scrisă sub formă locală

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

devine

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \tag{3}$$

Din (2) şi (3) rezultă

$$\nabla^2 \Psi = 0 \tag{4}$$

sau

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0 \tag{4'}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Făcând schimbarea de variabilă

$$\eta = y - ct = y - \frac{\omega}{k}t \tag{5}$$

unde $c = \omega/k$ este viteza de fază a undei, ecuaţia (4') se poate rezolva prin metoda separării variabilelor:

$$\Psi(\eta, z) = Y(\eta) \cdot Z(z) \tag{6}$$

Introducând (6) în (4') rezultă

$$\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial \eta^2} = \alpha^2 \tag{7}$$

unde α este o constantă ce va fi determinată ulterior.

Soluţia primei ecuaţii (7) este

$$Z(z) = Z_1 e^{\alpha z} + Z_2 e^{-\alpha z} \tag{8}$$

Deoarece pe fundul mării ($z = -H$) componenta verticală a vitezei valului este nulă

$$0 = v_z = -\frac{\partial Z}{\partial z} = \alpha\left(Z_1 e^{-\alpha H} - Z_2 e^{\alpha H}\right)$$

rezultă că

$$Z_1 e^{-\alpha H} = Z_2 e^{\alpha H} = \frac{A}{2} \tag{9}$$

unde A este o constantă. Introducând (9) în (8) rezultă

$$Z(z) = A\frac{e^{\alpha(z+H)} + e^{-\alpha(z+H)}}{2} = A\,\mathrm{ch}\left[\alpha(z+H)\right] \tag{10}$$

Soluţia celei de-a doua ecuaţii (7) este

$$Y(\eta) = Y_0 \cos(\alpha\eta - \varphi_0)$$

sau

$$Y(y,t) = Y_0 \cos(\alpha y - \alpha ct - \varphi_0)$$

unde φ_0 (faza iniţială) şi Y_0 sunt constante. Cum lungimea de undă λ este intervalul minim al periodicităţii spaţiale, din ecuaţia de mai sus rezultă că

$$\alpha = k \equiv \frac{2\pi}{\lambda}$$

şi deci

$$Y(y,t) = Y_0 \cos(\omega t - ky + \varphi_0) \tag{11}$$

Înlocuind (11) şi (10) în (6) găsim

$$\Psi(y,z,t) = B\cos(\omega t - ky + \varphi_0)\,\mathrm{ch}\left[k(z+H)\right] \tag{12}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde $B = AY_0$ este o constantă.

În aceste condiţii componentele vitezei unei particule de fluid sunt

$$\left\{ \begin{array}{rcl} v_y & = & -\frac{\partial \Psi}{\partial y} = -kB \sin(\omega t - ky + \varphi_0) \operatorname{ch}[k(z+H)] \\ v_z & = & -\frac{\partial \Psi}{\partial z} = -kB \cos(\omega t - ky + \varphi_0) \operatorname{sh}[k(z+H)] \end{array} \right. \tag{13}$$

Ecuaţiile parametrice ale mişcării unei particule de fluid se află integrând ecuaţiile (13) în raport cu timpul

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & y_0 + \frac{B}{c} \cos(\omega t - ky + \varphi_0) \operatorname{ch}[k(z+H)] \\ z & = & z_0 - \frac{B}{c} \sin(\omega t - ky + \varphi_0) \operatorname{sh}[k(z+H)] \end{array} \right. \tag{14}$$

unde y_0 şi z_0 reprezintă coordonatele poziţiei de echilibru a particulei de fluid. Eliminând timpul în ecuaţiile (14) rezultă ecuaţia traiectoriei particulei de fluid

$$\frac{(y-y_0)^2}{\left\{\frac{B}{c}\operatorname{ch}[k(z+H)]\right\}^2} + \frac{(z-z_0)^2}{\left\{\frac{B}{c}\operatorname{sh}[k(z+H)]\right\}^2} = 1 \tag{15}$$

Aşadar traiectoria unei particule de fluid este o elipsă, ea fiind rezultatul compunerii a două mişcări oscilatorii efectuate după două direcţii reciproc perpendiculare. Din ecuaţia (15) se observă că:

- semiaxele elipsei sunt verticală, respectiv orizontală şi că semiaxa mare este orizontală;

- la fundul mării elipsa degenerează într-un segment de dreaptă orizontal;

- elipsa se aplatizează şi se îngustează pe orizontală pe măsură ce adâncimea apei creşte.

Dacă apa este adâncă ($H \gg \lambda$ sau $kH \gg 1$)

$$\operatorname{sh}[k(z+H)] \simeq \operatorname{ch}[k(z+H)] \simeq \frac{1}{2} e^{k(z+H)}$$

În aceste condiţii traiectoria particulei de fluid este un cerc descris de ecuaţia

$$(y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = \left[\frac{B}{2c} e^{k(z+H)}\right]^2$$

De aici se observă că raza cercului scade exponenţial pe măsură ce adâncimea măsurată de la suprafaţa liberă a apei creşte. Prin urmare undele superficiale în apă adâncă nu perturbă apreciabil apa aflată la o adâncime mai mare decât lungimea de undă λ (mai exact $\lambda/2\pi$). Această proprietate este utilizată la proiectarea structurilor plutitoare, cum ar fi platformele petroliere maritime. Dacă partea scufundată a structurii are înălţimea h, structura nu va fi afectată apreciabil de undele cu lungimea de undă mai mică decât h.

Dacă apa este puţin adâncă ($H \ll \lambda$ sau $kH \ll 1$)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \operatorname{sh}[k(z+H)] & \simeq & k(z+H) \\ \operatorname{ch}[k(z+H)] & \simeq & 1 \end{array} \right.$$

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi ecuaţiile (14) se scriu

$$\begin{cases} y = y_0 + \frac{B}{c}\cos(\omega t - ky + \varphi_0) \\ z = \dfrac{z_0 - \dfrac{BkH}{c}\sin(\omega t - ky + \varphi_0)}{1 + \dfrac{Bk}{c}\sin(\omega t - ky + \varphi_0)} \simeq -H \end{cases}$$

De aici se observă că amplitudinea mişcării oscilatorii rezultante este independentă de adâncime şi, în plus, în ape puţin adânci, undele superficiale sunt esenţial longitudinale.

b) Pentru a determina ecuaţia de dispersie în cazul undelor superficiale trebuie scrisă o ecuaţie de mişcare a unei particule de fluid oarecare, de tipul ecuaţiei principiului al doilea al lui Newton. În cazul fluidelor nevâscoase această ecuaţie poartă numele de ecuaţia lui Euler

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla U \tag{16}$$

unde $U = gz$ este potenţialul gravitaţional, iar p este presiunea statică

$$p = p_0 + \frac{\sigma}{R} = p_0 - \sigma\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \tag{17}$$

unde σ este coeficientul de tensiune superficială al apei, p_0 este presiunea atmosferică, iar $R = \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^{-1}$ este raza de curbură a suprafeţei apei în punctul în care se află particula de fluid. Semnul (-) care apare în ecuaţia (17) se datorează faptului că, dacă suprafaţa liberă este convexă, atunci $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} < 0$, iar presiunea sub suprafaţa liberă a lichidului este mai mare decât presiunea atmosferică.

Ţinând cont de identitatea

$$(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = \frac{1}{2}\nabla(v^2) - \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v}) = \frac{1}{2}\nabla(v^2)$$

şi de ecuaţiile (2) şi (17), ecuaţia (16) se rescrie

$$\nabla\left(-\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} - \frac{\sigma}{\rho}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + gz\right) = 0$$

Inegrând această ecuaţie de-a lungul unei linii de curent se obţine

$$-\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} - \frac{\sigma}{\rho}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + gz = f(t) \tag{18}$$

unde $f(t)$ este "constanta" de integrare, care poate fi cel mult o funcţie de timp. Dacă particula de fluid se află în repaus, ecuaţia (18) se scrie

$$\frac{p_0}{\rho} + gz_0 = f(t) \tag{19}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Din (18) şi (19) rezultă

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}-\frac{\sigma}{\rho}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+g\left(z-z_0\right)=0 \tag{20}$$

Pătratul vitezei particulei de fluid este

$$\begin{aligned} v^2 &= v_y^2+v_z^2=\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2 \\ &= k^2B^2\left\{\sin^2\left(\omega t-ky+\varphi_0\right)\operatorname{ch}^2\left[k\left(z+H\right)\right]\right. \\ &\quad \left.+\cos^2\left(\omega t-ky+\varphi_0\right)\operatorname{sh}^2\left[k\left(z+H\right)\right]\right\} \\ &\simeq 0 \end{aligned}$$

deoarece undele au amplitudine mică ($kB \ll 1$).

Curbura suprafeţei apei în punctul în care se află particula de fluid este conform ecuaţiei (14_2)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{k^2B}{c}\sin\left(\omega t-ky+\varphi_0\right)\operatorname{sh}kH$$

iar

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial t}=-kcB\sin\left(\omega t-ky+\varphi_0\right)\operatorname{ch}kH$$

Utilizând aceste expresii, din ecuaţia (20) rezultă

$$c=\sqrt{\left(\frac{\sigma k}{\rho}+\frac{g}{k}\right)\operatorname{th}kH} \tag{21}$$

iar ecuaţia de dispersie este

$$\omega=\sqrt{\left(\frac{\sigma k^3}{\rho}+gk\right)\operatorname{th}kH} \tag{22}$$

În cazul undelor de apă adâncă ($H \gg \lambda$ sau $kH \gg 1$)

$$\operatorname{th}kH \simeq 1$$

iar ecuaţiile (21) şi (22) se scriu

$$c=\sqrt{\frac{\sigma k}{\rho}+\frac{g}{k}}$$

şi

$$\omega=\sqrt{\frac{\sigma k^3}{\rho}+gk}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Viteza de fază este minimă dacă

$$k_0 = \sqrt{\frac{\rho g}{\sigma}}$$

sau

$$\lambda_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \simeq 1,73 \text{ cm}$$

şi are valoarea

$$c_{\min} = \sqrt{2\sqrt{\frac{g\sigma}{\rho}}} \simeq 0,23 \text{ m/s}$$

- dacă $\lambda \ll \lambda_0$ sau $k \gg k_0$ undele se numesc unde capilare, având viteza de fază

$$c = \sqrt{\frac{\sigma k}{\rho}}$$

şi viteza de grup

$$v_g = \frac{3}{2}c$$

În cazul undelor capilare se observă că dispersia este una anomală (undele scurte se propagă mai repede decât cele lungi).

- dacă $\lambda \gg \lambda_0$ sau $k \ll k_0$ undele se numesc unde gravitaţionale, având viteza de fază

$$c = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

şi viteza de grup

$$v_g = \frac{1}{2}c$$

În cazul undelor gravitaţionale dispersia este una normală.

În cazul undelor de maree sau de apă puţin adâncă ($H \ll \lambda$ sau $kH \ll 1$)

$$\text{th}kH \simeq kH$$

şi deci

$$c = \sqrt{gH}$$

iar

$$v_g = c$$

Se observă că undele de maree sunt unde gravitaţionale, iar în cazul lor dispersia este absentă.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

3 ACUSTICĂ

3.1 Unde în gaze

3.1.1 Un fluture dă din aripi de cel mult 15 ori pe secundă, frecvenţa fiind deci în infrasunete, pe când un ţânţar dă din aripi de cel puţin 300 ori pe secundă, frecvenţa fiind în domeniul audibil.

⋆3.1.2 Fie un tub orizontal cu aria secţiunii S în care se află un fluid la presiunea p. Dacă la $t = 0$ pistonul din stânga tubului începe să se mişte spre dreapta cu viteza constantă v, după un timp Δt porţiunea de fluid din stânga punctului A (Fig. 3.1.2R) se va mişca cu viteza v a pistonului, iar porţiunea din dreapta acestui punct va fi în repaus. Graniţa dintre aceste regiuni de fluid se va deplasa spre dreapta cu viteza c de propagare a perturbaţiei de presiune.

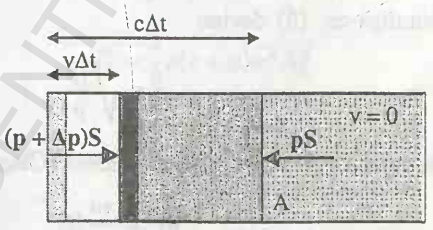


Fig. 3.1.2R

Variaţia de impuls a masei de fluid puse în mişcare în timpul Δt este

$$\Delta p = \Delta m\,(v - 0) = \rho S c \Delta t v \qquad (1)$$

Impulsul forţei rezultante care acţionează asupra masei de fluid puse în mişcare este

$$H = F\Delta t = [(p + \Delta p) - p]\, S\Delta t = \Delta p S \Delta t \qquad (2)$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Aplicând teorema variaţiei impulsului $H = \Delta p$, din (1) şi (2) rezultă

$$c = \frac{\Delta p}{\rho v} \tag{3}$$

Creşterea de presiune în fluidul pus în mişcare prin apăsarea pistonului (adică prin comprimarea fluidului) este dată de o lege de tip Hooke

$$\Delta p = -B\frac{\Delta V}{V_0} = -B\frac{-Sv\Delta t}{Sc\Delta t} = B\frac{v}{c} \tag{4}$$

unde B este modulul de compresibilitate al fluidului respectiv.

Din (3) şi (4) rezultă

$$c = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \tag{5}$$

Pentru un gaz, în care propagarea undei nu este însoţită de degajare de căldură, procesul fiind unul rapid (transformarea termodinamică fiind deci una adiabatică) expresia modulului de compresibilitate se scrie

$$B = -V\frac{\partial p}{\partial V}$$

Utilizând ecuaţia lui Poisson

$$pV^{\gamma} = const$$

pe care o logaritmăm şi apoi o diferenţiem, modulul de compresibilitate se scrie

$$B = \gamma p$$

În aceste condiţii ec. (5) devine

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \tag{6}$$

Din ecuaţia termică de stare a gazului ideal (Clapeyron-Mendeleev)

$$pV = \frac{m}{\mu}RT$$

prin împărţirea ambilor membri la V se găseşte

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{\mu}$$

iar ec. (6) devine

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{\gamma R\,(T_0 + t)}{\mu}} = 20\sqrt{T_0 + t}\ \text{(m/s)}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

•3.1.3

$$\lambda \leq 2mm \Rightarrow \nu \geq \frac{1570m/s}{2mm} = 7,85 \cdot 10^5 \text{ Hz}$$

3.1.4

$$\Delta t = D\left(\frac{1}{c-v} - \frac{1}{c+v}\right) = 2D\frac{v}{c^2 - v^2}$$

de unde

$$v = -\frac{D}{\Delta t} + \sqrt{\left(\frac{D}{\Delta t}\right)^2 + c^2} = 28,7 \text{ m/s}$$

3.1.5 a) Nu, deoarece frecvenţele emise de aceste fluiere se află în ultrasunete.

b)

$$\nu_b = |\nu_1 - \nu_2|$$

de unde

$$\nu_2 = \nu_1 \pm \nu_b = 28,5 \text{ kHz}$$

deoarece valoarea $18,5kHz$ se află în intervalul sunetelor audibile.

•3.1.6

$$d = 2c(t_1 + t_2) = 48,96 \text{ m}$$

3.1.7 a) Din enunţ

$$n_1 = \frac{A_1}{A_2} = \frac{r_2}{r_1} \tag{1}$$

Presupunând că vântul bate de la A spre B, în punctul A intensitatea undei este

$$I_1' = \frac{1}{2}\rho(c-v)\omega^2 A_1'^2$$

iar în B

$$I_2' = \frac{1}{2}\rho(c+v)\omega^2 A_2'^2$$

de unde

$$\frac{I_1'}{I_2'} = \frac{(c-v)A_1'^2}{(c+v)A_2'^2} \tag{2}$$

dar

$$\frac{I_1'}{I_2'} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \tag{3}$$

Din (1)-(3)

$$v = c\frac{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2}{1 + \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2} = 16 \text{ m/s}$$

deci vântul bate de la A spre B.

b) $k = n_1^2 = 6,2$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

3.1.8 a)

$$I = \frac{1}{2}\rho c\omega^2 \frac{A^2}{r}$$

de unde

$$A = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2Ir}{\rho c}} = \frac{1}{\pi\nu}\sqrt{\frac{Ir}{2\rho c}} = 7,59 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

b) Alegând o suprafaţă cilindrică având perimetrul $2\pi r$ puterea sursei este

$$P = \int I \cdot dS = \int I \cdot 2\pi r dz = 2\pi r I z = 0,31 \text{ W}$$

unde s-a ales înălţimea cilindrului z egală cu unitatea.

c)

$$I(R) = \frac{P}{2\pi R z} = I(r)\frac{r}{R} = 0,05 \text{ W/m}^2$$

d)

$$I(R) = \frac{\Delta p_{\max}^2}{2\rho c}$$

de unde

$$\Delta p_{\max} = \sqrt{2\rho c I(R)} = 6,63 \text{ N/m}^2$$

3.1.9 a) $c = 0 \Rightarrow T = 0$. Dar, prin integrarea ecuaţiei din enunţ rezultă

$$T = T_1 + ah$$

de unde

$$H = -\frac{T_1}{a} = 42 \text{ km}$$

b) Conform rezolvării problemei 2.1.21 expresia razei de curbură este

$$R(h) = \frac{c}{\frac{dc}{dh}}$$

Deoarece

$$c = c_0\sqrt{\frac{T}{T_0}} = c_0\sqrt{\frac{ah + T_1}{T_0}}$$

atunci raza de curbură este

$$R(h) = 2\left(h + \frac{T_1}{a}\right)$$

c) Timpul în care sunetul ajunge de la Pământ la înălţimea H este

$$\tau_1 = \int_0^H \frac{dh}{c} = \frac{1}{c_0}\sqrt{T_0}\int_0^H \frac{dh}{\sqrt{ah + T_1}} = -\frac{2\sqrt{T_0 T_1}}{ac_0} \simeq 244 \text{ s}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Prin urmare timpul în care sunetul ajunge din nou pe Pământ este

$$\tau = 2\tau_1 = -\frac{4\sqrt{T_0 T_1}}{ac_0} = 488 \text{ s} = 8 \text{ min } 8 \text{ s}$$

Observaţie: Gradientul vertical de temperatură explică de ce ziua, când aerul de la suprafaţa Pământului este mai cald decât aerul din păturile din ce în ce mai înalte, nu se aud conversaţiile la distanţe mari (raza sonoră se curbează spre zona cu temperatura mai mică). Noaptea însă, lucrurile stau invers. Pătura de aer de la suprafaţa Pământului este mai rece decât pătura imediat următoare, astfel încât se pot auzi conversaţii purtate la distanţe mari.

3.1.10

$$T(x) = T_1 + (T_2 - T_1)\frac{x}{l}$$

deci

$$\tau = \int_0^l \frac{dx}{c} = \frac{\sqrt{T_0}}{c_0}\int_0^l \frac{dx}{\sqrt{T(x)}} = \frac{2l}{c_0}\frac{\sqrt{T_0}}{\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}}$$

3.1.11

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{S_0}\int P dS = \frac{P \cdot 2S}{S_0}$$

unde

$$S = 2\pi\left(R^2 + \frac{h^2}{4}\right)(1 - \cos\theta) = \frac{\pi h^2}{2}\left[1 + \frac{4R^2}{h^2} - \sqrt{1 + \frac{4R^2}{h^2}}\right]$$

este aria calotei sferice desenată punctat în Fig. 3.1.11R, iar

$$S_0 = 4\pi\left(1 + \frac{4R^2}{h^2}\right)$$

este aria sferei din care face parte calota.

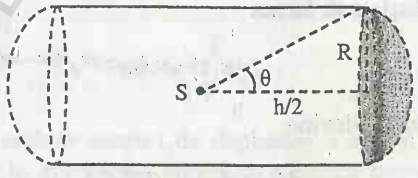


Fig. 3.1.11R

Prin urmare

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{4}h^2 P\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4R^2}{h^2}}}\right] = 0{,}03 \text{ W}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

3.1.12 a) Pentru obţinerea de maxime de intensitate la ieşirea din cutie, raza reflectată direct pe prima faţă şi cea retrotransmisă prin prima faţă (v. problema 2.3.11) trebuie să fie în opoziţie de fază. Cum diferenţa de drum dintre cele două raze este

$$\Delta r = 2L$$

atunci

$$\Delta\varphi \equiv k\Delta r = \frac{4\pi L}{\lambda} = (2n+1)\,\pi,\ n \in \aleph$$

de unde

$$L = (2n+1)\,\frac{\lambda}{4} = n + 0,5\ (\mathrm{m})$$

De aici se vede că grosimea minimă a cutiei pentru a satisface condiţiile din enunţ este $L = 0,5$ m.

b) Deoarece cutia este imersată în aer (mediile 1 şi 3 sunt identice, având deci aceeaşi impedanţă), conform problemei 2.3.11 rezultă că $Z_2 = Z_1$ sau

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{c_1}{c_2} = \frac{1}{2}\rho_1 = 0,6465\ \mathrm{kg/m^3}$$

3.1.13

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi &= (2n+1)\,\pi \Leftrightarrow \\
\frac{2\pi}{\lambda}\Delta r &= (2n+1)\,\pi \Rightarrow \\
\Delta r &\equiv \pi r_n - 2r_n = (2n+1)\,\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \\
r_n &= \frac{2n+1}{\pi-2}\,\frac{\lambda}{2}
\end{aligned}$$

de unde

$$r_0 = \frac{\lambda}{2\,(\pi-2)} = 17,5\ \mathrm{cm}$$

⋆•3.1.14 a) Scriind soluţia sub forma

$$\xi\,(x,t) = A_0 e^{-\gamma x} e^{i(\omega t - kx)}$$

ecuaţia din enunţ devine

$$-\omega^2\xi = c^2\,(\gamma+ik)^2\,\xi + \epsilon\,(\gamma+ik)^2\,i\omega\xi$$

sau, scriind

$$\omega = ck$$

ecuaţia de mai sus devine

$$(\gamma+ik)^2 = -\frac{ck^2}{c+ik\epsilon} = -\frac{ck^2\,(c-ik\epsilon)}{c^2+k^2\epsilon^2} \simeq -\frac{k^2}{c}\,(c-ik\epsilon)$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

de unde

$$\gamma = \frac{k^2}{2c}\epsilon$$

b) Scriind

$$k = \frac{\omega}{c}$$

coeficientul de absorbţie este

$$\gamma = \frac{\omega^2}{2c^3}\epsilon$$

de unde se vede că pe măsură ce frecvenţa ultrasunetelor creşte, creşte şi coeficientul de absorbţie al acestora în ţesutul uman.

3.2 Efectul Doppler

3.2.1 Frecvenţa receptată în funcţie de frecvenţa sunetului emis de sursă este în cazul general dată de expresia (v. Fig. 3.2.1R): $\nu_r = \nu_s \dfrac{1 - \frac{v_r}{c}\cos\alpha_r}{1 - \frac{v_s}{c}\cos\alpha_s}$. Unghiurile sunt $\alpha_{r,s} = \sphericalangle\left(\overrightarrow{v}_{r,s}, \widehat{k}\right)$, unde $\widehat{k}$ este versorul direcţiei de propagare a sunetului şi este îndreptat totdeauna de la sursă către receptor.

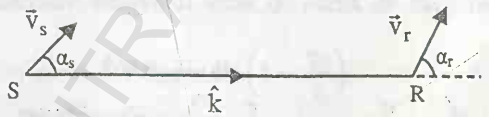


Fig. 3.2.1R

În cazul de faţă ($v_r = 0$)

$$\nu_r = \nu_s \frac{1}{1 \mp \frac{v_s}{c}}$$

relaţie valabilă pentru ambele sensuri de deplasare a sursei: spre receptor şi dinspre receptor. Cum la apropierea sursei de receptor frecvenţa înregistrată de acesta este mai mare decât frecvenţa undelor emise de sursă, trebuie pusă condiţia ca frecvenţa undelor înregistrate să se afle în domeniul ultrasunetelor

$$\nu_r > \nu_M = 20 \text{ kHz}$$

De aici rezultă

$$v_s > c\left(1 - \frac{\nu_s}{\nu_M}\right) = 170 \text{ m/s}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Dacă sursa se îndepărtează de receptor frecvenţa înregistrată de acesta este mai mică decât frecvenţa undelor emise de sursă. Prin urmare condiţia care trebuie realizată este ca frecvenţa receptată să se afle în domeniul infrasunetelor

$$\nu_r < \nu_m = 16 \text{ Hz}$$

Calculele dau

$$v_s > c\left(\frac{\nu_s}{\nu_m} - 1\right) = 212,16 \text{ km/s}$$

3.2.2 Dacă barca se deplasează împotriva valurilor

$$\nu_1 = \nu_0(1 + \frac{v}{c}) = \frac{c+v}{\lambda}$$

iar dacă barca fuge de valuri

$$\nu_2 = \nu_0(1 - \frac{v}{c}) = \frac{c-v}{\lambda}$$

Din aceste două ecuaţii rezultă

a)

$$c = \lambda\frac{\nu_1 + \nu_2}{2} = 15 \text{ m/s}$$

şi

b)

$$v = \lambda\frac{\nu_1 - \nu_2}{2} = 5 \text{ m/s}$$

3.2.3

$$v_{s\max} = \omega A$$

$$\Delta\nu_r = \nu_s\left(\frac{c}{c - v_{s\max}} - \frac{c}{c + v_{s\max}}\right) = 2\nu_s\frac{cv_{s\max}}{c^2 - v_{s\max}^2} \simeq 2\nu_s\frac{v_{s\max}}{c} = 20 \text{ Hz}$$

Observaţie: Aproximaţia de mai sus se poate face doar dacă eroarea relativă comisă este mai mică decât o anumită limită, de exemplu 1%

$$\frac{\Delta\nu_r}{\nu_r} \equiv \frac{v^2}{c^2} < 0,01$$

Acest lucru se realizează dacă $v < 0,1c$!

3.2.4

$$\nu = \nu_0\frac{1}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta}$$

de unde

$$\nu_m = \nu_0\frac{1}{1 + \frac{v}{c}}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi

$$\nu_M = \nu_0 \frac{1}{1 - \frac{v}{c}}$$

Din aceste două ecuaţii rezultă

$$v = c\frac{\nu_M - \nu_m}{\nu_M + \nu_m} = 110 \text{ m/s} = 396 \text{ km/h}$$

3.2.5 Viteza de propagare a sunetului este

$$c = c_0\sqrt{1 + \alpha t}$$

unde

$$\alpha = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{273,15\ ^0\text{C}} = 0,003661 \text{ grd}^{-1}$$

iar

$$c_0 = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{\mu}} = \sqrt{\frac{\frac{7}{5} \cdot 8314,34 \frac{\text{J}}{\text{kmol}\cdot\text{K}} \cdot 273,15 \text{ K}}{28,9 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}}} = 332 \text{ m/s}$$

O formulă alternativă, practică în calcule este $c = 20\sqrt{T}$. La 30 ^{0}C viteza sunetului este $c = 350$ m/s.

Frecvenţa înregistrată de receptor corespunzătoare sunetului emis de sursa înspre care se deplasează este

$$\nu_{R1} = \nu_0\left(1 + \frac{v_R}{c}\right)$$

iar cea corespunzătoare sunetului emis de sursa de care receptorul se îndepărtează

$$\nu_{R2} = \nu_0\left(1 - \frac{v_R}{c}\right)$$

Prin urmare frecvenţa bătăilor înregistrate de receptor va fi

$$\nu_b = \nu_{R1} - \nu_{R2} = \nu_0 \cdot \frac{2v_R}{c}$$

de unde

$$v_R = \frac{\nu_b c}{2\nu_0} = \frac{1,5 \text{ Hz} \cdot 350 \text{ m/s}}{2 \cdot 440 \text{ Hz}} = 0,60 \text{ m/s}$$

3.2.6

$$\nu_{R1} = \nu_0\left(1 + \frac{v_R}{c - v_0}\right)$$

iar

$$\nu_{R2} = \nu_0\left(1 - \frac{v_R}{c + v_0}\right)$$

Prin urmare

$$v_R = \frac{\nu_b}{\nu_0}\frac{c^2 - v_0^2}{2c}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

a) Deoarece $\frac{v_0}{c} < 0,1$ formula de mai sus se scrie

$$v_R = \frac{\nu_b c}{2\nu_0} = 0,60 \text{ m/s}$$

ceea ce înseamnă că prezenţa vântului nu necesită practic modificarea vitezei de deplasare a receptorului.

b) În acest caz formula de mai sus nu se mai poate simplifica, rezultatul fiind $v_r = 0,58$ m/s.

3.2.7 a)

$$\nu_{r_1} = \nu_s \frac{1}{1 + \frac{v_s}{c}} = 773 \text{ Hz}$$

b) frecvenţa de recepţie a sunetului reflectat este aceeaşi cu frecvenţa receptată de un observator solidar cu obstacolul:

$$\nu_{r_2} = \nu_s \frac{1}{1 - \frac{v_s}{c}} = 1417 \text{ Hz}$$

c)

$$\nu_b = \nu_{r_2} - \nu_{r_1} = 644 \text{ Hz}$$

3.2.8 a) $c = 340$ m/s. Viteza sunetului se calculează faţă de mediu, în cazul nostru aerul liniştit.

b)

$$N = \left[\frac{\Delta t}{T_1}\right] = [\nu_1 \cdot \Delta t]$$

unde $[*]$ este partea întreagă a lui $*$, iar T_1 şi ν_1 sunt perioada, respectiv frecvenţa cu care undele emise de sursă "lovesc" obstacolul în mişcare. Frecvenţa "recepţionată" de obstacol este

$$\nu_1 = \nu_s \frac{c + v}{c - v_s}$$

Prin urmare

$$N = \left[\nu_s \frac{c + v}{c - v_s} \cdot \Delta t\right] = [14,8] = 14$$

c) $c = 340$ m/s.

d)

$$\lambda_2 = \frac{c}{\nu_2}$$

unde ν_2 este frecvenţa undelor reflectate. La reflexie însă frecvenţa undelor rămâne aceeaşi. Prin urmare $\nu_2 = \nu_1$. Deci

$$\nu_2 = \nu_s \frac{c + v}{c - v_s}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

de unde

$$\lambda_2 = \frac{c}{\nu_s}\frac{c-v_s}{c+v} = 24,4 \text{ cm}$$

3.2.9 Frecvenţa pe care o înregistrează receptorul direct de la sursă este

$$\nu_1 = \nu_s \frac{c-v_r}{c+v_s}$$

Frecvenţa pe care o "recepţionează" obstacolul este

$$\nu_i = \nu_s \frac{c+v}{c-v_s}$$

Obstacolul joacă rolul de sursă în mişcare care emite unde cu frecvenţa egală cu cea a undelor incidente. Frecvenţa sunetului reflectat pe care o înregistrează receptorul este

$$\nu_2 = \nu_i \frac{c-v_r}{c-v} = \nu_s \frac{c+v}{c-v_s}\frac{c-v_r}{c-v}$$

În fine, frecvenţa bătăilor este

$$\begin{aligned} \nu_b &= |\nu_1 - \nu_2| = \left|\nu_s (c-v_r)\left(\frac{1}{c+v_s} - \frac{c+v}{(c-v_s)(c-v)}\right)\right| \\ &= \nu_s \frac{2c(c-v_r)(v+v_s)}{(c^2-v_s^2)(c-v)} \simeq \nu_s \frac{2(c-v_r)(v+v_s)}{c(c-v)} = 1130 \text{ Hz} \end{aligned}$$

•3.2.10 Frecvenţa sunetului incident pe sângele în mişcare este

$$\nu_i = \nu_0 \left(1 + \frac{v_s}{c}\right)$$

Frecvenţa sunetului reflectat este

$$\nu_r = \nu_i$$

După producerea reflexiei sângele acţionează ca o sursă de unde care le emite cu frecvenţa ν_r, iar ecograful joacă rolul de receptor.

Frecvenţa sunetului recepţionat de ecograf (ecoul) este

$$\nu_e = \nu_r \frac{1}{1 - \frac{v_s}{c}}$$

Frecvenţa bătăilor va fi

$$\begin{aligned} \nu_b &= \nu_e - \nu_i = \nu_i \frac{\frac{v_s}{c}}{1-\frac{v_s}{c}} = \nu_0 \frac{v_s}{c}\frac{1+\frac{v_s}{c}}{1-\frac{v_s}{c}} = \nu_0 \frac{v_s}{c}\left(1+\frac{v_s}{c}\right)\left(1-\frac{v_s}{c}\right)^{-1} \\ &\simeq \nu_0 \frac{v_s}{c}\left(1+\frac{v_s}{c}\right)^2 \simeq \nu_0 \frac{v_s}{c}\left(1+2\frac{v_s}{c}\right) \simeq \nu_0 \frac{v_s}{c} \simeq 64 \text{ Hz} \end{aligned}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

•3.2.11

$$\nu_b = 2\nu_0 \frac{v_r}{c} \simeq 2 \text{ Hz}$$

•3.2.12 a)

$$N = \left[\frac{\lambda}{2r}\right] = \left[\frac{c}{2r\nu}\right] = [15,7] = 15$$

b)

$$\lambda \leq 2r \Rightarrow \nu \geq \frac{c}{2r} = 157 \text{ MHz}$$

•3.2.13 a)

$$v_{\max} = \frac{c\nu_b}{2\nu_0} = 20,9 \text{ cm/s}$$

b)

$$\nu_{inimă} = 90 \text{ bătăi/ min} = 1,5 \text{ Hz}$$

•3.2.14

$$\nu_r = \nu_0 \left(1 + 2\frac{v_r + v_s}{c}\right) = 53,2 \text{ kHz}$$

3.3 Unde de şoc

3.3.1 a)

$$t = \frac{h}{c}$$

b) Analizând datele din Fig. 3.3.1R avem

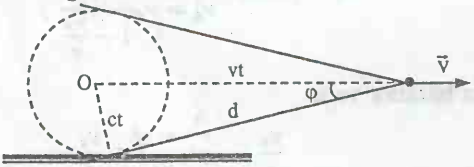


Fig. 3.3.1R

$$d = t\sqrt{c^2 + v^2} = h\sqrt{1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2} = h\sqrt{1 + M^2}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

3.3.2 a) Aplicând teorema sinusurilor în ΔAOB [Fig. 3.3.2R(a)] rezultă

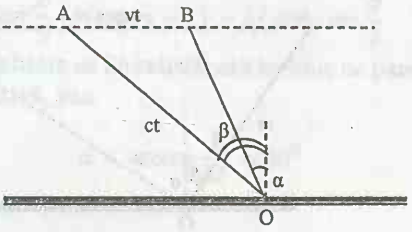


Fig. 3.3.2R (a)

$$\frac{AB}{\sin(\beta-\alpha)}=\frac{AO}{\sin\left[\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]}$$

sau

$$\frac{v}{\sin(\beta-\alpha)}=\frac{c}{\cos\alpha}$$

de unde

$$\beta=\alpha+\arcsin(M\cos\alpha)$$

b) Conform Fig. 3.3.2R(b)

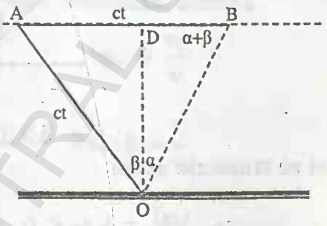


Fig. 3.3.2R (b)

în ΔAOB

$$m\left(\widehat{O}\right)=m\left(\widehat{B}\right)=\alpha+\beta$$

În ΔODB $m\left(\widehat{ODB}\right)=90^0$ şi deci

$$2\alpha+\beta=90^0$$

sau

$$\beta=90^0-2\alpha$$

c) Conform Fig. 3.3.2R(c)

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

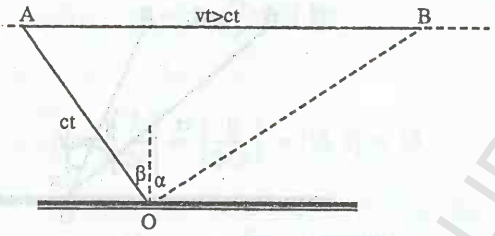


Fig. 3.3.2R (c)

$$m\left(\widehat{AOB}\right) = 90^0 = \alpha + \beta$$

şi deci

$$\beta = 90^0 - \alpha$$

3.3.3 Utilizând Fig. 3.3.3R

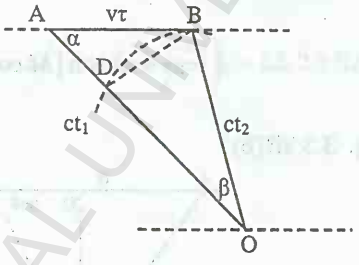


Fig. 3.3.3R

enunţul problemei se transcrie astfel

$$\tau + t_2 < t_1$$

sau

$$c\tau + ct_2 < ct_1 \Leftrightarrow c\tau < AO - OD = AD$$

unde pe segmentul AD s-a construit un segment OD egal cu OB. Notând cu $\beta = m\left(\widehat{AOB}\right)$, deoarece ΔBOD este isoscel, deducem că $m\left(\widehat{ADB}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{2}$ şi $m\left(\widehat{ABD}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} - \alpha$. Aplicând teorema sinusurilor în ΔADB găsim

$$\frac{AD}{\cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)} = \frac{AB}{\cos\frac{\beta}{2}}$$

de unde, deoarece $AB = v\tau = cM\tau$

$$AD = cM\tau \frac{\cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)}{\cos\frac{\beta}{2}} > c\tau$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

De aici rezultă

$$\cos\frac{\beta}{2}\,(M\cos\alpha - 1) > M\sin\alpha\sin\frac{\beta}{2}$$

Pentru ca această inegalitate să fie satisfăcută trebuie ca paranteza din membrul stâng să fie strict pozitivă, sau

$$\alpha < \arccos\frac{1}{M} = 60^0$$

3.3.4 Conform Fig. 3.3.4R

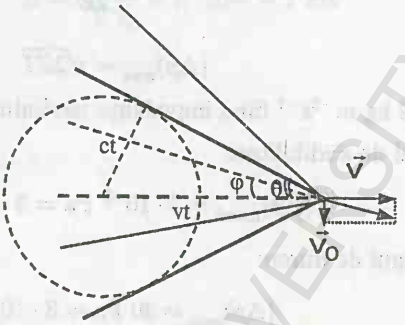


Fig. 3.3.4R

prin utilizarea sistemului de referinţă legat de apa râului, care este inerţial deoarece viteza v_0 a râului este constantă, rezultă

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{v_0}{v}$$

Deoarece

$$\sin\theta = \frac{c}{v}$$

găsim

$$v_0 = c\frac{\mathrm{tg}\varphi}{\sin\theta}$$

3.4 Calităţile sunetului

3.4.1

$$\Delta L = L_2 - L_1 = 10\lg\frac{I_2}{I_0} - 10\lg\frac{I_1}{I_0} = 10\lg\frac{I_2}{I_1} = 10\lg\frac{\frac{1}{2}Z\omega_2^2A_2^2}{\frac{1}{2}Z\omega_1^2A_1^2}$$

$$= 10\lg\left(\frac{\omega_2A_2}{\omega_1A_1}\right)^2 = 20\lg 4 = 40\lg 2 = 12\ (\mathrm{dB})$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

3.4.2

$$L = 10\lg\frac{I_1+I_2}{I_0} = 10\lg\left(2\frac{I_1}{I_0}\right) = 10\lg 2 + 10\lg\frac{I_1}{I_0}$$
$$= L_1 + 3\text{ dB} = 50\text{ dB}$$

3.4.3 a)

$$I = \frac{(\Delta p)^2_{\max}}{2Z}$$

de unde

$$(\Delta p)_{\max} = \sqrt{2ZI}$$

$Z = \rho c = 442\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-2}\text{s}^{-1}$ fiind impedanţa mediului.

Pentru pragul de audibilitate

$$(\Delta p)_{\max 0} = 3\cdot 10^{-5}\text{ Pa} = 3\cdot 10^{-10} p_0$$

şi pentru pragul de durere

$$(\Delta p)_{\max} = 30\text{ Pa} = 3\cdot 10^{-4} p_0$$

b)

$$I = \frac{1}{2}Z\omega^2 A^2$$

de unde

$$A = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2I}{Z}}$$

Pentru pragul de audibilitate ($\nu = 1$ kHz)

$$A_0 = 10^{-11}\text{ m}$$

iar pentru pragul de durere

$$A = 10^{-5}\text{ m}$$

Din aceste valori se vede că pentru cazul pragului de audibilitate urechea umană poate percepe oscilaţii a căror amplitudine este egală cu a zecea parte din valoarea diametrului unui atom. Prin urmare, aprecierea conform căreia urechea este un organ de simţ cu o sensibilitate deosebită este pe deplin justificată.

3.4.4

$$P = SI = SI_0\cdot 10^{\frac{L}{10}} = 0{,}8\cdot 10^{-12}\text{ W}$$

3.4.5 a)

$$I = \frac{(\Delta p)^2_{\max}}{2Z} = 3540\text{ W/m}^2$$

b)

$$L = 10\lg\frac{I}{I_0} = 155{,}49\text{ dB}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

3.4.6 Distanţa la care sunetul nu se mai aude este distanţa la care intensitatea undei sonore care produce sunetul este egală cu intensitatea corespunzătoare pragului de audibilitate $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2. Aşadar, ţinând cont de legătura dintre intensitatea undei şi puterea sursei de unde, avem:

$$P = I \cdot 4\pi r^2 = I_0 \cdot 4\pi R^2$$

de unde

$$R = r\sqrt{\frac{I}{I_0}} = r \cdot 10^{\frac{s}{20}} = 1 \text{ km}$$

3.5 Surse sonore

3.5.1 Coarde elastice

3.5.1.1

$$T = \mu c^2 = \mu \lambda^2 \nu^2$$

Cum

$$l = n\frac{\lambda}{2}$$

atunci

$$T = \mu \left(\frac{2l}{n}\right)^2 \nu^2$$

Deoarece

$$\nu' = \frac{\nu}{3}$$

atunci

$$T' = \frac{T}{9}$$

3.5.1.2 Din enunţ

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

Dar

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^2$$

deci

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \sqrt{2}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

3.5.1.3

$$\nu_d - \nu_1 = \nu_b \tag{1}$$

iar

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} \equiv \frac{\nu_d}{\nu_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă

$$\nu_d = \nu_b \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}} = 5\nu_b = 100 \text{ Hz}$$

3.5.1.4 Din enunţ

$$\nu_d - \nu_1 = \nu_b = 4,6 \text{ Hz}$$

şi

$$\nu_2 = \nu_d$$

Cum

$$T = \mu \left(\frac{2l}{n}\right)^2 \nu^2$$

rezultă

$$l\nu_1 = l(1-\varepsilon)\nu_2$$

Din eceste ecuaţii se găseşte

$$\nu_d = \frac{\nu_b}{\varepsilon} = 230 \text{ Hz}$$

3.5.1.5 Din enunţ

$$l = n\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2l}{n}$$

Prin urmare

$$M = \frac{\frac{m}{l}c^2}{g} = \frac{4ml\nu^2}{gn^2} = 168,6 \text{ g}$$

3.5.1.6

$$l_0\nu_0 = l\nu$$

dar

$$l = l_0(1 + \alpha t)$$

şi

$$\nu = \nu_0 - \nu_b$$

Prin urmare

$$t = \frac{1}{\alpha}\frac{\nu_b}{\nu_0 - \nu_b} \simeq \frac{1}{\alpha}\frac{\nu_b}{\nu_0} = 250\ ^0\text{C}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

3.5.1.7 a)

$$T = Mg = 9,6 \text{ N}$$

b)

$$\nu = \frac{n}{2}\sqrt{\frac{T}{ml}} = 100 \text{ Hz}$$

c)

$$n' = 2n = 20$$

3.5.1.8 a)

$$T = \frac{Mgl}{4h} = 2 \cdot 10^3 \text{ N}$$

b)

$$m = \frac{Mg}{16h\nu_t^2} = 50 \text{ g}$$

c)

$$\rho = \frac{m}{Sl} = 8000 \text{ kg/m}^3$$

d)

$$E = 4\rho l^2 \nu_l^2 = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

3.5.2 Tuburi sonore

•3.5.2.1

$$\nu = \frac{1}{4l} \cdot 20\sqrt{T} = 3424 \text{ Hz}$$

3.5.2.2 Pentru tubul închis

$$l = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

de unde

$$\nu_n = (2n+1)\,\nu_0$$

În cazul nostru

$$n = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\nu}{\nu_0} - 1\right)\right] = [4,5] = 4 \text{ armonici}$$

Frecvenţele lor sunt $\nu_1 = 450$ Hz, $\nu_2 = 750$ Hz, $\nu_3 = 1050$ Hz şi $\nu_3 = 1350$ Hz.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pentru tubul deschis

$$l = n\frac{\lambda}{2}$$

de unde

$$\nu_n = n\nu_1$$

În cazul nostru

$$n = \left[\frac{\nu}{\nu_1}\right] - 1 = [10] - 1 = 9 \text{ armonici}$$

Frecvenţele lor sunt: 300 Hz, 450 Hz, 600 Hz, 750 Hz, 900 Hz, 1050 Hz, 1200 Hz, 1350 Hz şi 1500Hz.

3.5.2.3 a)

$$l = \frac{\lambda}{4} = \frac{c}{4\nu} = 34 \text{ cm}$$

b)

$$\nu' = \frac{c}{2l} = 2\nu = 500 \text{ Hz}$$

3.5.2.4 a)

$$\nu = \frac{c}{2l} = 5600 \text{ Hz}$$

b)

$$c_1 = 4L\nu = 2\frac{L}{l}c = 5600 \text{ m/s}$$

3.5.2.5

$$l = \frac{c+v}{4\nu_b} = 90 \text{ cm}$$

3.5.2.6 a)

$$\nu_0 = \frac{c}{4L}$$

b)

$$\nu_1 = \frac{3c}{4L}$$

În acest caz se vor auzi sunetul fundamental, prima armonică şi sunetul a cărui frecvenţă este egală cu frecvenţa bătăilor dintre acestea

$$\nu_b = \nu_2 - \nu_1 = \frac{c}{2L}$$

3.5.2.7 Sunetul produs de diapazon se amplifică dacă frecvenţa de vibraţie a acestuia coincide cu frecvenţa proprie se oscilaţie a coloanei de aer din vas:

$$\nu = \frac{2n+1}{4}\frac{c}{l_n}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

de unde

$$h = l - l_n = l - \frac{2n+1}{4}\frac{c}{\nu}$$

Din condiţia $h > 0$ rezultă

$$n < \frac{2l\nu}{c} - \frac{1}{2} = 1,5$$

sau $n \in \{0, 1\}$. Pentru n=0$\Rightarrow$ $h = 75$ cm, iar pentru n=1$\Rightarrow$ $h = 25$ cm.

3.5.2.8 Într-un punct de coordonată x, măsurată de-a lungul tubului de la capătul deschis la cel închis, tmperatura este

$$T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{l}x$$

În aceste condiţii timpul necesar sunetului pentru a parcurge lungimea tubului este

$$\int_0^\tau dt = \int_0^l \frac{dx}{c} = \int_0^l \frac{dx}{a\sqrt{T}}$$

de unde

$$\tau = \frac{2l}{a\left(\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}\right)} = \frac{l}{c_m}$$

de unde viteza medie de propagare a undei sonore în tub este

$$c_m = \frac{a}{2}\left(\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}\right)$$

Cum

$$\nu_0 = \frac{c_m}{4l}$$

rezultă

$$\nu_0 = \frac{a}{8l}\left(\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}\right)$$

⋆3.5.2.9 a) Cum volumul gâtului sticlei este neglijabil în comparaţie cu volumul util, lungimea tubului sonor este $L = \frac{V_0}{S}$. La excitarea frecvenţei fundamentale în sticlă se formează o undă staţionară cu un nod pe fundul sticlei şi un ventru în locul unde începe gâtul sticlei. Prin urmare $L = \frac{\lambda}{4}$. Deci $\nu_1 = \frac{c}{\lambda} = \frac{cS}{4V_0}$.

b) Frecvenţa oscilaţiilor aerului din rezonator este

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m + \frac{M}{3}}} \qquad (1)$$

unde $m = \rho s l$ este masa de aer din gâtul sticlei, $M = \rho V_0$ este masa "resortului" echivalent (masa aerului din volumul util al sticlei), iar k este constanta sa elastică.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pentru a afla expresia constantei alastice a acestui resort se ţine cont că oscilaţiile particulelor de aer din gâtul sticlei sunt oscilaţii de presiune. Prin urmare forţa netă care acţionează asupra unui strat de aer cu lungimea δx din volumul acestuia este $\delta F = s\delta p$.

Procesul de propagare a sunetului în volumul sticlei fiind unul adiabatic putem scrie $pV^\gamma = const.$ Logaritmând legea lui Poisson şi apoi diferenţiind rezultatul avem:

$$\delta p = -\gamma \frac{p_0}{V_0}\delta V = -\gamma \frac{p_0}{V_0} s\delta x = -\frac{\rho c^2 s}{V_0}\delta x$$

Prin urmare

$$\delta F = -\rho \frac{c^2}{V_0} s^2 \delta x$$

Această forţă este de tip elastic $\delta F = -k\delta x$, de unde

$$k = \rho \frac{c^2}{V_0} s^2 \tag{2}$$

Cum $k = m\omega_0^2 = \rho s l \omega_0^2$ rezultă:

$$\omega_0^2 = \frac{c^2}{V_0 l} s$$

Înlocuind (2) în (1) rezultă

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{cs\sqrt{3}}{V_0} \left(1 + 3\frac{sl}{V_0}\right)^{-1/2} \simeq \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{cs}{V_0} \left(1 - \frac{3}{2}\frac{sl}{V_0}\right)$$

Raportul frecvenţelor obţinute în cele două cazuri este

$$\frac{\nu_0}{\nu_1} = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \frac{s}{S} \left(1 - \frac{3}{2}\frac{sl}{V_0}\right) < 1$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BIBLIOGRAFIE

1. R. K. Adair, *Concepts in Physics*, Academic Press, New York 1969.
2. M. Alonso, E. J. Finn, *Fundamental University Physics: Fields and Waves* (vol. 2), Addison-Wesley, New York 1969.
3. B. B. Buhovţev, V. D. Krivcenkov, C. I. Meakişev, I. M. Saraeva, *Culegere de probleme de fizică elementară*, Editura Cartea Moldovenească, Chişinău 1990.
4. G. Cone, G. Stanciu, S. Tudorache, *Probleme de fizică pentru liceu*, vol. I, Editura Academiei, Bucureşti 1986.
5. C. Corega, M. Todică, V. Săndulache, S. Aştilean, *Probleme de fizică*, Editura Facla, Timişoara 1990.
6. F. S. Crawford Jr., *Waves - Berkeley Physics Course*, vol. 3, McGraw-Hill Book Company, New York, USA 1968.
7. T. Creţu, *Fizică - curs universitar*, Editura Tehnică, Bucureşti 1996.
8. I. Druică-Zeletin, A. Popescu, *Probleme de mecanică şi acustică*, ediţia a doua, Editura Tehnică, Bucureşti 1977.
9. A. P. French, *Vibrations and Waves*, Chapman and Hall, Cornwall UK 1991.
10. R. B. Gardiner, E. W. Laing, *Solving Problems in Mechanics*, Oliver & Boyd Ltd., Edinburgh 1969.
11. D. C. Giancoli, *Physics - principles with applications*, 5^{th} edition, Prentice Hall International, Inc. 1998.
12. D. Halliday, R. Resnick, *Fundamentals of Physics*, 2^{nd} edition, John Wiley & Sons, New York 1986.
13. A. Hristev, *Mecanică şi acustică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1984.
14. B. Ianopol, *Oscilaţii şi Unde - probleme rezolvate*, Editura MINIED, Iaşi 1998.
15. I. Iordache, *Fizica pentru toţi*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti 1991.
16. I. Irodov, *Problèmes de physique générale*, Mir, Moscova 1983.
17. P. L. Kapiţa, *Probleme de fizică*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti 1986.
18. E. Kiss, V. Kiss, *Culegere de probleme de fizică*, Societatea de Ştiinţe Fizice şi Chimice din România, Bucureşti 1979.
19. I. G. Main, *Vibrations and Waves in Physics*, 2^{nd} edition, Cambridge University Press, New York 1987.
20. M. Marinciuc, *Olimpiade de fizică*, Editura Lumina, Chişinău 1994.
21. C. R. Nave, B. C. Nave, *Physics for the Health Sciences*, 3^{rd} edition, W. B. Saunders Company, Philadelphia, USA 1985.
22. I. Pop ş.a., *Culegere de probleme de mecanică*, Editura Didactică şi Pedagogică,

BCU "MIHAI EMINESCU" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Bucureşti 1974.

23. I. M. Popescu, G. F. Cone, G. A. Stanciu, *Culegere de probleme de fizică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1982.
24. M. Sandu, *Probleme de fizică*, Scrisul Românesc, Craiova 1988.
25. M. Sandu, *500 probleme de fizică*, Editura Tehnică, Bucureşti 1991.
26. M. Sandu, *Ghid pentru cercurile de fizică*, Editura Academiei Române, Bucureşti 1991.
27. M. Sandu, *Teme şi probleme pentru cercurile de fizică*, Editura Hyperion XXI, Bucureşti 1993.
28. F. W. Sears, M. W. Zemansky, H. D. Young, *College Physics*, 6^{th} edition, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, USA 1985.
29. M. M. Sternheim, J. W. Kane, *General Physics*, John Willey & Sons, New York, USA 1995.
30. I. Ţăposu, *Mecanică analitică şi vibraţii - teorie şi probleme*, Editura Tehnică, Bucureşti 1998.

B.C.U. „M. EMINESCU" IAŞI
FIZICĂ

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

CĂRŢI TEHNICE - **MATRIX ROM** - CĂRŢI ACADEMICE

10 ANI DE ACTIVITATE - PESTE 1000 DE TITLURI

În domeniul **FIZICĂ*** au mai apărut:

- M. I. Beciu (Universitatea tehnică de construcţii Bucureşti) - **PROBLEME DE FIZICĂ. EDIŢIE ÎN DOUĂ LIMBI** • Preţ: 80000 lei
- Mihail Ceclan, Rodica Elena Ceclan (Universitatea "Politehnica" Bucureşti) - **CÂTE CEVA DESPRE . . . MECANICĂ. TEORIE ŞI APLICAŢII** • Preţ: 65000 lei
- Dan Cojoc, Niculae Puşcaş (Universitatea "Politehnica" Bucureşti) - **INTRODUCERE ÎN PROCESAREA SEMNALELOR OPTICE** • Preţ: 100000 lei
- Gabriela Cone, C. Neguţu (Universitatea "Politehnica" Bucureşti) - **MECANICA PUNCTULUI MATERIAL ŞI A SOLIDULUI RIGID. TEORIA RELATIVITĂŢII** • Preţ: 175000 lei
- Gabriela Cone, Alina Gearbă (Universitatea "Politehnica" Bucureşti) - **PROBLEME DE ELECTRICITATE ŞI MAGNETISM CU REZOLVĂRI** • Preţ: 120000 lei
- Ileana Creangă (Universitatea "Politehnica" Bucureşti) - **MECANICA CUANTICĂ** • Preţ: 85000 lei
- Corneliu Ghizdeanu (Universitatea "Politehnica" Bucureşti) - **LUCRĂRI PRACTICE DE TERMODINAMICĂ ŞI FIZICĂ STATISTICĂ** • Preţ:50000 lei
- Corneliu Ghizdeanu (Universitatea "Politehnica" Bucureşti) - **CULEGERE DE PROBLEME DE TERMODINAMICĂ ŞI FIZICĂ STATISTICĂ** • Preţ: 115000 lei
- Maria Honciu (Universitatea "Politehnica" Bucureşti) - - **ÎNDRUMAR DE LABORATOR. FIZICA ATOMULUI ŞI FIZICA SOLIDULUI** • Preţ: 50000 lei
- Ilie Ivanov, Iulian Laurenţiu-Guţu (Universitatea "Politehnica" Bucureşti) - **LASERI IONICI CU GAZE NOBILE** • Preţ: 199000 lei
- Ilie Ivanov (Universitatea "Politehnica" Bucureşti) – **PROBLEME REZOLVATE DE FIZICĂ CLASICĂ** • Preţ: 100000 lei
- Ec. Niculescu (Universitatea "Politehnica" Bucureşti) - **OPTICA ELECTROMAGNETICĂ. TEORIE ŞI APLICAŢII** • Preţ: 95000 lei
- Ec. Niculescu, M. Cristea (Universitatea "Politehnica" Bucureşti) – **MECANICA CUANTICĂ. PROBLEME REZOLVATE** • Preţ: 100000 lei
- Ion M. Popescu (Universitatea "Politehnica" Bucureşti) - **ELECTRICITATE ŞI MAGNETISM** (3 volume) • Preţ: 250000 lei
- M. Stan (Universitatea "Politehnica" Bucureşti) - **FIZICĂ. ELECTROMAGNETISM, FIZICĂ CUANTICĂ, FIZICĂ NUCLEARĂ** • Preţ: 120000 lei
- Mircea Stan (Universitatea "Politehnica" Bucureşti) - **MECANICA MEDIILOR CONTINUE** • Preţ: 85000

Ofertele complete şi gratuite pe domenii se pot solicita telefonic. Achiziţionarea cărţilor se poate face direct de la sediul editurii, prin colet poştal cu plata ramburs (pe baza unei comenzi scrise) sau de la distribuitorii din Bucureşti (librăria RAMA, librăria 164, librăria AGIR, librăria Luceafărul, librăria Universităţii), Bacău, Braşov, Cluj Napoca, Constanţa, Craiova, Iaşi, Oradea, Piteşti, Râmnicu Sărat, Reşita, Timişoara. Clienţi primesc periodic informaţii despre noile lucrări apărute sau în curs de apariţie.

* Preţurile din această listă sunt preţuri de vânzare directă, valabile începând cu 01.04.2003

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY